



2º Bach

REPASO EVAU CLM

Nombre:_____ Curso:_____

MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Está permitido copiar y fotocopiar esta obra, total o parcialmente, con el objetivo de que sea accesible para el alumnado.

 **Reconocimiento** (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

 **No Comercial** (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

 **Compartir Igual** (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas



Reconocimiento – NoComercial – SinObraDerivada (by-nc-nd): No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

Profesor:

.....

Materiales utilizados:

Ejercicios y problemas organizados y extraídos de exámenes de EvAU CLM de Matemáticas II por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)

Ejercicios y problemas recopilados por D. Jose Luis Hernández Quintanilla (IES Melchor de Macanaz)

Algunas imágenes de esquemas del Blog <https://marielmatesblog.wordpress.com>



RESULTADOS DE LAS UNIDADES DEL CURSO

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz



UNIDADES:

Unidad 1. Límites. Continuidad.....	3
Unidad 2. Derivadas	15
Unidad 3.1. Integral indefinida.	29
Unidad 3.2. Integral definida	41
Unidad 4. Matrices. Determinantes.....	55
Unidad 5. Sistemas de ecuaciones.....	69
Unidad 6 - 7. Vectores. Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos.	79
Unidad 8. Estadística y probabilidad.....	105



Unidad 1. Límites. Continuidad.

Esquema de repaso:

1. Definición de función. Dominio. Recorrido.

Una función real de variable real ($f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) es una correspondencia que asocia a cada valor de un subconjunto de $\mathbb{R}$ (llamado dominio) un único valor de otro subconjunto de $\mathbb{R}$ (llamado conjunto imagen o recorrido)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

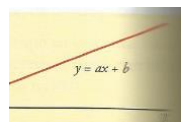
La primera magnitud x es la variable independiente y la segunda “ y ” la variable dependiente.

Dominio $f = \text{Dom}(f) = D = \{\text{conjunto de valores de } x \text{ para los que está definida la función}\}$

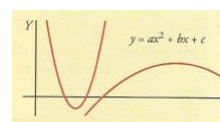
Recorrido $f = \text{Rec}(f) = \{\text{conjunto de valores reales que son imagen de los valores del dominio}\}$

2. Funciones elementales.

Lineales



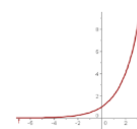
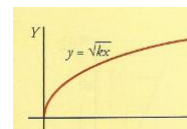
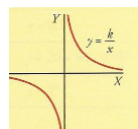
Cuadráticas



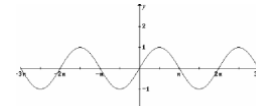
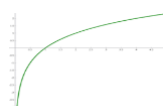
Polinómicas

$x, x^2, x^3, \dots$

Racionales (P/Q) Radicales $\sqrt[n]{P}$ Exponencial (2^x)



Logarítmica Trigonómicas (sen(x), cos(x), ...=



3. Dominio de funciones elementales

Funciones	Dominios
Polinómicas (P(x)) Exponenciales (2^x) Sen(x), Cos(x)	$\mathbb{R}$
Racionales P(x)/Q(x)	$\mathbb{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$
Radicales $\sqrt[n]{Q(x)}$	Estudiar la inecuación $Q(x) \geq 0$
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	Estudiar la inecuación $Q(x) > 0$

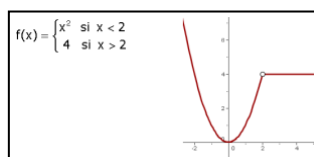
4. Cálculo del recorrido.

Recorrido $f = \text{Dominio de la inversa de } f = \text{Dom } f^{-1}$

Para calcular la inversa f^{-1}

Dada $y=f(x)$, escribir $x=f(y)$ y despejar “ y ”.

5. Funciones definidas a trozos. Valor absoluto.



Son funciones divididas en varios intervalos. Hay que saber representarlas. En particular las función $|f(x)|$

$|f(x)|$ se representa resolviendo $f(x)=0$ y expresando como una función a trozos de intervalos con valor $f(x)$ cuando es $f(x)>0$ y $-f(x)$ cuando $f(x)<0$.

6. Idea intuitiva de límite. Límites laterales.

Un número real, L , es el límite de una función, f , en el punto “ a ” si al tomar valores de x suficientemente próximos a “ a ” (distintos de a), sus imágenes, $f(x)$, están tan próximas a L como queramos. Se designa por: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Límites laterales. Podemos aproximarnos a un valor “ a ” por la izq, con valores menores que él, o por la derecha, con valores mayores.

Izq $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$; Dcha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Para que exista el límite ambos límites han de coincidir.

7. Propiedades de los límites.

- $\lim (f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x)$
- $\lim f(x) \cdot g(x)=\lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim k \cdot g(x)=k \cdot \lim g(x)$
- Si $\lim g(x)>0$, $\lim f(x)/g(x)=\lim f(x)/\lim g(x)$
- Si $g(x)$ es potencial, exponencial, logarítmica o trigonométrica $\rightarrow \lim g(f(x))=g(\lim f(x))$
- $\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)}$

8. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \neq \infty$	Se dice que hay una asíntota horizontal en $y=c$.
Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios	(1) Si Grado P > Grado Q $\rightarrow$ Tiende a $\pm \infty$. Para saber el signo sustituir por un número grande para ver el signo. (2) Si Grado P < Grado Q $\rightarrow$ Tiende a 0. (3) Si Grado P = Grado Q $\rightarrow$ Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado. https://youtu.be/icZDdqfHAUo
Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, con g y h funciones	- Si g(x) crece más rápido que h(x) tiende a ∞ y si es al revés tiende a 0. -Orden de crecimiento de algunas funciones: $\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$
$\infty - \infty$	-Resolver la expresión si se puede (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$) -Si es la diferencia de dos funciones, dependerá del orden de cada una. -Si hay raíces y los grados son los mismos multiplicar por el conjugado numerador y denominador (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$). https://youtu.be/XSfUKZbvpE
a^∞ , con $a \neq 1$	-Si $a > 1$ tiende a ∞ y si $0 < a < 1$ tiende a 0.
1^∞	-Resolverlo usando que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$ https://youtu.be/39Q1ZwI9cFY
$\frac{0}{0}$	-Resolver para convertirlo en otro tipo de indeterminación. (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} : \frac{1}{x + 1}$).

9. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow -\infty$

Usar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ <https://youtu.be/bQVo28zy27k>

10. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow a$

$\frac{k}{0}$, con $k \neq 0$	-Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen $+\infty$ ó $-\infty$. Izq $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$; Dcha $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ -Hay una asíntota vertical en $x=a$. https://youtu.be/yoAPeT7_mq8
$\frac{0}{0}$	-Descomponer numerador y denominador para simplificar. https://youtu.be/UtB_d6ZS_wg -Si aparecen raíces, multiplicar arriba y abajo por el conjugado. https://youtu.be/0M6wB158APQ
$\infty - \infty$	-Operar con la función para cambiar de indeterminación. (Ej: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$)
1^∞	-Resolver usando el número “e”.

11. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales. Los candidatos son los puntos que no están en el dominio y los extremos.

A.Vertical en $x=a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0}$ (habrá que estudiar signo por izq y dcha).

Asíntotas horizontales. A.Horizontal en $y=b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Asíntotas oblicua en $y=mx+n$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

La posición de $f(x)$ respecto de la asíntota se averigua mirando el signo de $f(x) - (mx + n)$ para valores grandes de x

12. Definición de función continua en un punto.

Se dice que **una función $f(x)$ es continua** en un punto $x=a$ si y sólo si se cumplen estas 3 condiciones:

1. $\exists f(a)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

13. Definición de función continua en intervalo.

- $f(x)$ es continua en (a,b) si lo es en todos sus puntos.
- $f(x)$ es continua en $[a,b]$ si es continua en (a,b) y es continua por la dcha en “a” y por la izq en “b”.

14. Tipos de discontinuidad.

- **Discontinuidad evitable.** No existe $f(a)$ ó existe pero no coincide con el límite. (Falla 1 o Falla 3)
- **Discontinuidad de salto o de 1ª especie.** (Falla 2)
 - Salto finito: no coinciden los laterales y son finitos.
 - salto infinito: algún límite lateral es infinito.
- **Discontinuidad esencial o de 2ª especie.**
Cuando no existe algún límite lateral

15. Continuidad de funciones elementales

Funciones	Continuidad
Polinómicas $P(x)$ Exponenciales (2^x) $\text{Sen}(x)$, $\text{Cos}(x)$	Continua en $\mathbb{R}$
Racionales $P(x)/Q(x)$	Continua en $\mathbb{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	Continua en $Q(x) \geq 0$
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	Continua en $Q(x) > 0$
$\text{Tag}(x)$	Continua salvo en $\frac{\pi}{2} + k\pi$

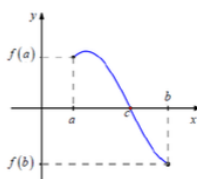
16. Propiedades de continuidad.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el punto $x = a$, por las propiedades de los límites también son continuas en $x = a$ las funciones:

- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $k \cdot f(x)$
- $(f(x))^{g(x)}$ si $f(a) > 0$
- $f(x)/g(x)$ si $g(a) \neq 0$
- $g(f(x))$ si $g(x)$ es continua en $f(a)$

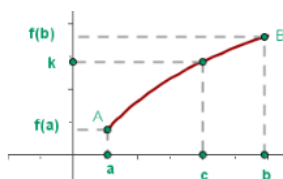
17. Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ (es decir, donde corta al eje OX).



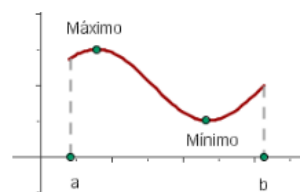
18. Propiedad de los valores intermedios (Teorema de Darboux).

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y n es cualquier número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $k \in (a, b)$ tal que $f(k) = n$.



19. Teorema de los extremos absolutos de Weierstrass.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a, b]$ (y por tanto está acotada). Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a $[a, b]$ donde $f(x)$ alcanza valores extremos absolutos: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ si $x \in [a, b]$.



Junio 2020/21

7. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Solución:

Julio 2020/21

5. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Solución:

Junio 2019/20

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Solución:

Julio 2019/20

3. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases},$$

donde $\ln$ es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución:

Julio 2018/19

- 1A.** a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = x e^{-x}$. **(1 punto)**

Solución:

Junio 2017/18

- 1A.** a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1,1]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

Solución:

Otros ejercicios propuestos:

Septiembre 2016/17

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

Asíntotas

Junio 2014 1B Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

(Sol.: a) $D(f) = \mathbb{R}^+ - \{2\}$ AH $y = -1$; b) $D(g) = \mathbb{R} - \{2\}$ AO $y = x + 4$; AV $x = 2$)

Septiembre 2014 1B Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

b) Estudia si tiene asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow +\infty$ (Sol.: $y = x + \frac{1}{2}$)

Junio 2011 1A. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$. (Sol.: AV $x = 0$, AO $y = 2x + 3/2$)

Sept. 2009. Se sabe que la recta $y = 9$ es una asíntota horizontal de la función

$f(x) = \frac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas. (Sol.: $a = 1/9$; AV $x = 6, x = -6$; AO no tiene)

Límites

Junio 2016 1B Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ (Sol.: 4)

3.- Reserva 2012 1B a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad:

b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ (Sol.: 1)

Reserva Junio 2011 1B. Calcula los límites: a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **Junio 2008.** a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ (Sol.: -7)

Unidad 2. Derivadas

Esquema de repaso:

1. Definición de derivada.

Llamaremos derivada de $f(x)$ en $x=a$ al límite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si ese límite no existiera, entonces $f(x)$ no sería derivable en $x=a$.

2. Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir, $m=f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$.

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

Ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=a$.

$$y-f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

Reglas para el cálculo de derivadas:

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$	$g(x) = (f(x))^n$	$g'(x) = n (f(x))^{n-1} f'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$g(x) = e^{f(x)}$	$g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$g(x) = a^{f(x)}$	$g'(x) = a^{f(x)} \ln a f'(x)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \ln f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
$f(x) = \log_{a x}$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$	$g(x) = \log_a f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \log_a f'(x)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$g(x) = \sin f(x)$	$g'(x) = \cos f(x) f'(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$g(x) = \cos f(x)$	$g'(x) = -\sin f(x) f'(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$g(x) = \operatorname{tg} f(x)$	$g'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) f'(x)$
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x) = \arcsen f(x)$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x) = \arccos f(x)$	$g'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

Operaciones con la derivada

DERIVADA DE LA SUMA:

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN:

$$D(k f(x)) = k f'(x)$$

PRODUCTO DE FUNCIONES:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

COCIENTE DE FUNCIONES:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

REGLA DE LA CADENA (COMPOSICIÓN DE FUNCIONES):

$$D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3. Derivadas laterales.

Llamaremos derivada por la izq de $f(x)$ en $x=a$

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Llamaremos derivada por la dcha de $f(x)$ en $x=a$

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para que exista $f'(a)$, las derivadas laterales deben existir y tener el mismo valor. Si no es así, si existen y son distintas se dice que la función presenta en $x=a$ un **punto anguloso**. Si existen pero son infinitas se dice que es un **punto de tangente vertical**.

5. Crecimiento y decrecimiento.

$f(x)$ es estrictamente creciente $\rightarrow f'(x) > 0$

$f(x)$ es estrictamente decreciente $\rightarrow f'(x) < 0$

Los valores en que $f'(x)=0$ son candidatos a máximos y mínimos relativos.

Para estudiar el crecimiento de una función $f(x)$:

1. Analizamos la continuidad de $f(x)$
2. Calculamos $f'(x)=0$ para obtener candidatos a máximos o mínimos relativos.
3. Estudiamos el signo de $f'(x)$ con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

7. Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y que verifica que $f(a) = f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretación: Existe al menos un punto cuya recta tangente tiene pendiente 0 y por tanto es paralela al eje OX.

10. Problemas de optimización

4. Relación continuidad y derivabilidad.

$f(x)$ derivable en $x=a \rightarrow f(x)$ es continua en $x=a$

(por lo tanto, las funciones que no son continuas no son derivables).

Al revés no es cierto, se pueden encontrar funciones continuas que no son derivables.

Ejemplo: $f(x)=|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

6. Curvatura de una función.

Si $f(x)$ es una función que tiene $f''(x)$, entonces:

$f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cup$) (cóncava hacia abajo)

$f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa ($\cap$) (cóncava hacia arriba)

Los valores en que $f''(x)=0$ son candidatos a Puntos de Inflexión.

Para estudiar la curvatura de una función $f(x)$:

1. Analizamos la continuidad de $f(x)$
2. Calculamos $f''(x)=0$ para obtener candidatos a puntos de inflexión.
3. Estudiamos el signo de $f''(x)$ con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

8. Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación: Existe un punto cuya tangente a $f(x)$ es paralela a la de la recta que une $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

9. Regla de L'Hopital.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y derivables en un entorno del punto $x = a$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Junio 2020/21

6. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.
- b) [1,5 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Solución:

Junio 2020/21

7. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

Solución:

Julio 2020/21

5. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{e^{x-1} - 1}$.

Solución:

Julio 2020/21

6. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$.

- a) [1,5 puntos] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

Julio 2020/21

7. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.
- b) [1,5 puntos] Sea la función $f(x) = x \sin(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

Junio 2019/20

3. b) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1 + 2x - \cos(x^2)}$.

Solución:

Julio 2019/20

3. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$.

Solución:

Junio 2019/20

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

- a) [1,5 puntos] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

Julio 2019/20

4. a) [1,5 puntos] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.
- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

Junio 2018/19

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.
(1 punto)

Solución:

Junio 2018/19

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$ (1,25 puntos por límite)

Solución:

Julio 2018/19

- 1B.** a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

Solución:

Otros propuestos

Junio 2017/18

- 1B.** a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. **(0,75 puntos)**
 b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
 c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

Septiembre 2017/18

- 1A.** Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2 e^{-bt}$, donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.
 a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**
 b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** **Nota:** A largo plazo se entiende como que $t \rightarrow +\infty$.

Septiembre 2017/18

- 1B.** a) Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**

Junio 2016/17

- 1A.** Dada la función
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
 b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. **(1 punto)**

Junio 2016/17

- 2A.** Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Junio 2016/17

- 1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x}$

(1,25 puntos por límite)

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

Septiembre 2016/17

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. (2,5 puntos)

JUNIO-2016-1A

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:

- Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3 . (1,25 puntos)
- Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (1,25 puntos) (Sol.: a) $a = 0$; b) Mínimo relativo en $(0, -6)$ y Máximo relativo $(-2, -2)$)

PAEG-Junio-2015 1 A

Dada la función $f(x) = e^{\sin x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

- Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0,2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo (1,5 puntos) (Sol.: $a = -1$, $b = 1$)
- Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. (1 punto) (Sol.: $(0,2)$ mínimo)

PAEG-Junio-2015-2 B

Dada la función $f(x) = (x + 1)e^{2x}$, se pide:

- Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$
- Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas (Sol.: a) Cóncavo $\forall x \in \mathbb{R} / x > -2$ Convexo $\forall x \in \mathbb{R} / x < -2$; Punto de inflexión $(-2, 1/e^4)$)

JUNIO-2014-1A

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } 0 < x \end{cases} \text{ es continua y derivable en } x = 0 \quad (1, 5 \text{ puntos})$$

- Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ (1 punto) (Sol.: a) $b = -2$, $a = 1$; b) $y = 1 - 2x$)

PAEG Junio 2014 1B

- Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1 + x^2 e^{-x^2}$ (1,5 puntos)
- Calcula las asíntotas de $f(x)$ (1 punto)

(Sol.: a) Decreciente $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -1) \cup (0 < x < 1)$; Creciente $\forall x \in \mathbb{R} / (-1 < x < 0) \cup (x > 1)$; Mínimo relativo $(-1, (e+1)/e)$ Máximo relativo en $(0, 1)$ Mínimo relativo en $(1, (e+1)/e)$; b) AH $y = 1$)

Septiembre 2014 1B

Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

- a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (UD 3)
- b) Estudia si tiene asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow +\infty$ (Sol.: $y = x + \frac{1}{2}$)

JUNIO 2013 1B

- a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$
- b) Para esos valores, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x=0$

SEPTIEMBRE 2010

- a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{bx + c}{1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a; b; c$ de $\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea una

función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos) (Sol.: $a = 1/2; b = -1/4; c = 3/4$)

PAEG Septiembre 2010 (Reserva) (1 A).

Dada la función $f(x) = \arctg \sqrt{x-1}$ definida para $x \geq 1$, se pide: a) Calcula y simplifica $f'(x)$. (1,5 puntos) b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal. (1 punto)

Reserva Septiembre 2009 B.

Dada la función $f(x) = 1/\ln(x)$, donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x ,

- a) Determina su dominio y sus asíntotas. b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

Reserva 2008

Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $(2, 8)$, tenga un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y además la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tenga pendiente 4. Calcular la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
(Sol.: $a = 2, b = -2, c = -4; x + 4y - 15 = 0$)

Junio 2008

Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$. (Sol.: $a = 2$ y $b = 1$)

Septiembre - 2008

Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx) \cdot e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Septiembre- 2008

Dadas las funciones $f(x) = \ln(1 - x^2)$ y $g(x) = \ln(1 + x^2)$, se pide:

- Determina el dominio de cada una de ellas.
- Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión

Teorema de Rolle

JUNIO 2016 1B.

- Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)
- Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)
- Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos) (Sol.: $[-1, 0]$)

PAEG Reserva 2013 1A.

- Enuncia el Teorema de Rolle. (1 punto)
- Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. (1,5 puntos)

Junio 2006

Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica cada caso por qué no contradice en teorema de Rolle.

- $f(x) = \frac{1}{x^4}$
- $g(x) = 2 - |x|$ (Sol.: a) No, no es continua en $x = 0$; b) No es derivable en $x = 0$)

Teorema del valor medio de Lagrange

PAEG Reserva 2013 1B.

- Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. (1,25 puntos)
- Calcula un punto del intervalo $[-2; 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2; 0)$ y $(2; 12)$. (1,25 puntos)

PAEG Junio 2010 (Reserva) (1 A).

Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

- Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)
- Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2; 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos) (Sol.: a) Máximo $(-2, 110)$, mínimo $(2, -34)$; b) $c = 0$)

Reserva 2008

Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo } [-1,3] \quad (\text{Sol.: } k = -2, p = 1)$$

Problemas de optimización

SEPTIEMBRE 2017 1B.

Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. (2,5 puntos)

SEPTIEMBRE 2016 1A.

Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que: El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado ¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito? (2,5 puntos) (Sol.: Mínimo si $L = 10 \text{ m}$ y $H = 10 \text{ m}$; $P = 60000 \text{ €}$)

PAEG – Sept.-2015

Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. (Sol.: Trozo1: 72 m $L(\text{base}) = 18 \text{ m}$)
Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2 .

PAEG Septiembre 2013 1B.

- Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. (1,5 puntos)

PAEG Reserva 2013 1A.

Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. (2,5 puntos)

Regla de L'Hôpital

PAEG – Sept.-2015 1 A

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x e^{\sin x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{x + \sin x}} \quad (\text{Sol.: a) } 2; \text{ b) } e^{1/2})$$

PAEG Septiembre 2013 1A

a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x = 0$$

b) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Sol.: a) $a = 2$; b) e^3)

PAEG Reserva 2013 1B

a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$

b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ (Sol.: a) $a = 2$, $a = -2$; b) 1)

Septiembre 2012 1A

a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x = 0$$

(Sol.: a) $a = 2$; b) e^3)

b) Calcula el límite cuando x tiende a $+\infty$)

Junio-2008

Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \quad (\text{Sol.: a) } -7; \text{ b) } e^{\pi-2/\pi})$$

Reserva 2008

Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \operatorname{sen} x + 2 \tan g x}{x + \operatorname{sen} x} \quad (\text{Sol.: } k = 10)$$

Septiembre 2006

a) Enuncia la regla de L'Hôpital. b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ (Sol: 1/3)

Junio 2003

Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ (Sol.: $L = \frac{1}{2}$)

Junio 2002

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$

Junio- 2001

Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ (Sol.: $L = \frac{1}{2}$)

Unidad 3.1. Integral indefinida.

1. Primitiva de una función. Integral indefinida.

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ si $F'(x)=f(x)$. En general, todas las funciones $F(x)+K$ serán también primitivas.

La integral de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas y se denota por $\int f(x)dx = F(x)+K$.
 K se denomina constante de integración.

Propiedades: 1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; 2. $\int c \cdot f(x)dx = c + \int f(x)dx$

2. Tabla de integrales inmediatas.

Forma sencillo	Forma compuesta
$\int dx = x + K$	$\int k dx = k \cdot x + K$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \quad (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$ ($n \neq -1$)
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] + K$
$\int e^x dx = e^x + K$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + K$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K$
$\int \sin x dx = -\cos x + K$	$\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + K$
$\int \cos x dx = \sin x + K$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + K$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$	$\int [1 + \tan^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \tan f(x) + K$
$\int -(1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \cot x + K$	$\int -[1 + \cot^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \cot f(x) + K$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + K$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc cot} x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \operatorname{arc cot} f(x) + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc sen} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \operatorname{arc sen} f(x) + K$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc cos} x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \operatorname{arc cos} f(x) + K$

3. Método de sustitución.

El método de integración por sustitución consiste en introducir una variable t , que sustituye a una expresión apropiada en función de x , de forma que la integral se transforme en otra de variable t , más fácil de integrar.

Ejemplo: $\int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$; Hacemos el cambio $t=\ln(x)$, $dt=1/xdx \rightarrow \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{(\ln(x))^4}{4} + k$

4. Método de integración por partes.

Del producto de derivadas $\rightarrow d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv \rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v + \int v \cdot du$

¿Cómo lo aplicamos?

$\int f(x) dx = \begin{cases} \text{llamamos } u(x) \text{ a una función que no tenga integral inmediata} \\ \text{llamamos } v(x)dx \text{ al resto de la integral} \end{cases}$

$$\int f(x) dx = \int u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du(x).$$

Nota: Para escoger $u(x)$ se utiliza la regla nemotécnica ALPES

A-Arcos(arccos,...), L- Logaritmos, P – Potencias ($x, x^2, \dots$), E – Exponencial (e^x), S – Senos, cosenos

5. Integración de funciones racionales. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

5.1 Si grado $P(x) > \text{grado } Q(x) \rightarrow$ Dividimos $P(x)$ entre $Q(x) \rightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, grado $R < \text{grado } Q$
 $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$, $\int C(x)$ es inmediata y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ es el caso 5.2

5.2 Si grado $P(x) < \text{grado } Q(x) \rightarrow$ Factorizamos el denominador $Q(x)$ y pueden darse 4 casos:

a) **Raíces reales simples** $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \rightarrow$ Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$

Calculamos los valores de A, B y C haciendo mcm y sustituyendo $x=a, x=b, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos.

b) **Raíces reales múltiples** $Q(x) = (x-a)^n \rightarrow$ Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{C}{(x-a)^n}$

Calculamos los valores de $A, B, \dots, C$ haciendo mcm y sustituyendo $x=a, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

c) **Raíces reales simples y múltiples** $Q(x) = (x-a)(x-b)^n \rightarrow$

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2} + \dots + \frac{D}{(x-b)^n}$

Calculamos los valores de $A, B, C, \dots, D$ haciendo mcm y sustituyendo $x=a, x=b, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

d) **No tiene raíces reales** $Q(x) = x^2 + a^2$ (factor irreducible de 2º grado)

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx}{Q(x)} + \frac{N}{Q(x)} \rightarrow$ La primera fracción se resuelve con logaritmos.

La segunda fracción hay que expresar $Q(x)$ de la forma $Q(x) = (x-a)^2 + b^2 = b^2 \cdot \left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right)$ con lo que

$$\int \frac{N}{Q(x)} = \frac{N}{b^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} dx = \frac{N}{b^2} \cdot \arctag\left(\frac{x-a}{b}\right) + k$$

Junio 2020/21

3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x} dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)
- b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$.

Solución:

Julio 2020/21

3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x) dx$.
- b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$.

Solución:

Septiembre 2017/18

2A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$. **(1 punto)****Solución:**

Septiembre 2016/17

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx$

b) $\int x^2 \ln x dx$

(1,25 puntos por integral)

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

Solución:

Otros propuestos:

PAEG JUNIO 2015 2B.

Dada la función $f(x) = (x + 1) \cdot e^{2x}$, se pide: a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. (1,25 puntos) b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas. (1,25 puntos).

(Sol.: a) Cóncava $(-2, +\infty)$, convexa $(-\infty, -2)$. P. Inflexión $(-2, 1/e^4)$; b) $F(x) = \frac{(2x+1)e^{2x}}{4} - \frac{1}{4}$

PAEG SEP-2015

Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}(4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx \quad \int x \ln x dx \quad (\text{Sol.: a) } \frac{8}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + k; \text{ b) } \frac{x^2}{2}(2\ln x - 1) + k)$$

PAEG SEP-2014

Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx, \quad \int \frac{2}{4+x^2} dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln \sqrt{e^{2x} - 1} + k; I = \arctag\left(\frac{x}{2}\right) + k)$$

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = e^x$

PAEG Reserva 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \int (x^2 + 2x) \ln x dx \quad (\text{Sol.: } I = 2 \arctag(\sin x) + k; I = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + k)$$

PAEG Reserva 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x\right) dx \quad \int 3\sqrt{2x+1} dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln^2 x + x \ln x - x + k; I = (2x+1) \sqrt{2x+1} + k)$$

PAEG Junio 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln(1 + \sin^2 x) + k; I = \ln x + \frac{1}{4} [\ln |x-2| - \ln |x+2|] + k)$$

PAEG Septiembre 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral

(Sol.: $I = 2 \ln x^2 - 2 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + k$; $I = \ln |e^x - 2| - \ln |e^x - 1| + k$)

PAEG SEPTIEMBRE 2012 2A

Calcula las siguientes integrales

a) $\int \sin^2 x \cos x dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (Sol.: a) $I = \frac{\sin^3 x}{3} + k$; b) $I = 2 e^{\sqrt{x}} + k$)

PAEG RESERVA 2012 2A

Calcula la siguiente integral $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$ (Sol.: $I = \ln |x+1| - \ln |x| - 2/x + k$)

PAEG RESERVA 2012 2A

Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x^2 + 1) e^x$ tal que $F(0) = 5$. (Sol.: $F(x) = (x^2 - 2x + 3) e^x + 2$)

PAEG JUNIO 2012 2B

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$ b) $\int (\tan x + \frac{1}{\tan x}) dx$

PAEG JUNIO 2011 2 A

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (\cos 2x + \sin x \cos x) dx$ b) $\int \frac{x^3-1}{x+2} dx$

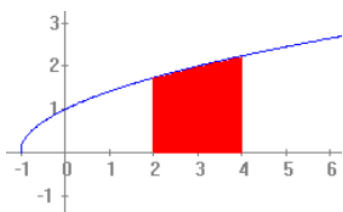
(Sol.: a) $I = \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \sin^2 x + k$, b) $I = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 4 - 9 \ln(x+2) + k$)

Unidad 3.2. Integral definida

Esquema de repaso:

6. Integral definida de una función continua.

Dada una función $f(x)$ continua y positiva en $[a, b]$, llamamos integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje OX . Dicha área la representaremos como $A = \int_a^b f(x) dx$. “a” se denomina límite inferior de la integración y “b” límite superior de la integración.



8. Regla de Barrow.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

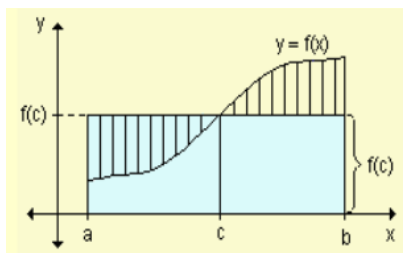
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

9. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, existe, por tanto, un punto $c [a, b]$ de tal modo que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Interpretación: El área del trapecio mixtilíneo considerando es igual que el área de un rectángulo de la misma anchura cuya altura sea la imagen de un punto que pertenezca al intervalo $[a, b]$



7. Propiedades.

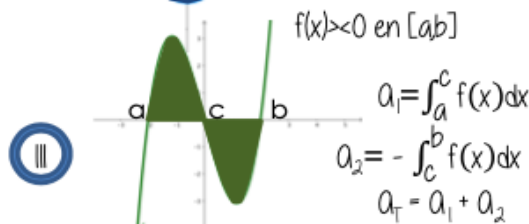
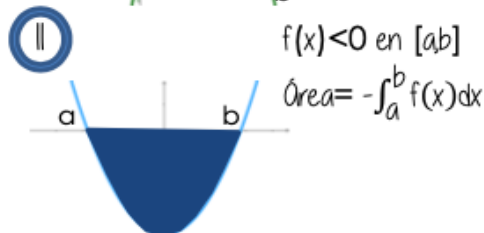
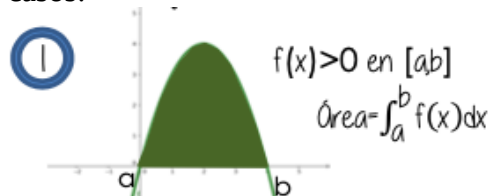
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- Si $f(x) > 0$ y continua en $[a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$
- $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
- $f(x) \leq g(x)$ continuas $\rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

10. Teorema fundamental del Cálculo integral.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, y $G(x)$ es la función definida en $[a, b]$ como $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, entonces $G(x)$ es derivable en $[a, b]$ y $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

11. Cálculo del área bajo una curva.

Tres casos:

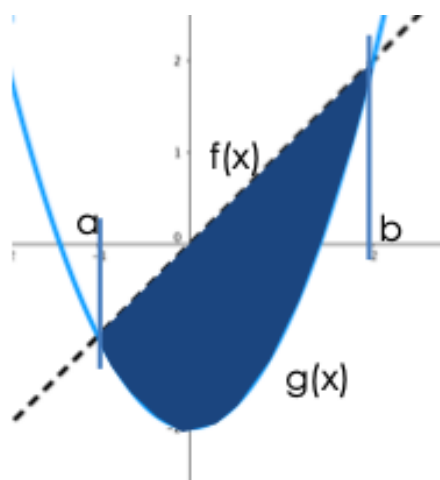


- Pasos:** 1) Hallar puntos de corte de $f(x)$ con OX .
2) Estudiar signo $f(x)$ en los intervalos obtenidos.
3) Hacer esbozo, escribir integrales y calcular.

12. Cálculo del área entre 2 curvas.

Pasos a seguir:

- 1) Hallar los puntos de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$ resolviendo $f(x)=g(x)$.
- 2) En los intervalos que forman los puntos anteriores estudiar cuál de las 2 funciones está por encima (para ello sustituye un punto intermedio de cada intervalo en cada función a ver cuál tiene más valor).
- 3) Realiza un esbozo de las funciones (RECOMENDABLE)
- 4) El área vendrá dada por $A=\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, siendo $f(x)$ la función que esté por encima.
- 5) Calcular la integral.



Junio 2019/20

5. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx$.
- b) [1,25 puntos] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Solución:

Julio 2019/20

5. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)
- b) [1,25 puntos] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Solución:

Junio 2018/19

- 2A.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

Solución:

Junio 2018/19

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

(1 punto)

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

Julio 2018/19

- 2A.** a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

Solución:

Julio 2018/19

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución:

Junio 2017/18

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

Solución:

Junio 2017/18

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x \, dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} \, dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

Solución:

Septiembre 2017/18

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} dx$

b) $\int_1^2 (2x - 3)e^{x-1} dx$

(1,25 puntos por integral)

Solución:

Junio 2016/17

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

Solución:

Septiembre 2016/17

- 1A.** a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x - 1)(x + 2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

Solución:

Otros ejercicios propuestos:

PAEG JUNIO 2016 2A

Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx$ (Sol.: $I = \frac{\pi}{2} - 1$)

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variables $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes

PAEG JUNIO 2016 2B

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. (1,5 puntos)

b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. (1 punto) (Sol.: a) $A = 112/3 \text{ u}^2$; b) $c = 3/2$)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 2A

Dada la función $g(x) = (x + b) \cos x$, $b \in \mathbb{R}$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0) = 1$

b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$

(Sol.: a) $G(x) = (x + b) \sin x + \cos x$; b) $b = -1$)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 2B

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ (0,5 puntos)

b) Calcular el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: b) $A = (3/2 - \ln 4) \text{ u}^2$)

PAEG JUNIO 2015 2A

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ (2 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior (2 puntos) (Sol.: $A = 16/3 \text{ u}^2$)

PAEG SEPTIEMBRE 2015 2A.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. (0,5 puntos)

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. (0,5 puntos)

c) Calcula el área de la región anterior. (1,5 puntos) (Sol.: c) $A = 14/3 \text{ u}^2$)

PAEG SEPTIEMBRE 2014 2A

a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$, y rectas $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: $A = 4 \text{ u}^2$)

Unidad 4. Matrices. Determinantes.

1. Definición de Matriz.

Se denomina matriz de orden o dimensión $m \times n$ a todo conjunto cuyos elementos están dispuestos en m filas y n columnas. La representaremos por

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{21} elemento que está en la fila 2 columna 1

2. Tipos de matrices.

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ CUADRADA matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto ceros.

MATRIZ FILA matriz que solo tiene una fila.

MATRIZ COLUMNA matriz que solo tiene una columna.

MATRIZ NULA todos sus elementos valen cero.

MATRIZ TRASPUESTA DE A, es otra matriz A^t que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

MATRIZ SIMÉTRICA es una matriz cuadrada cuyos elementos a ambos lados de la diagonal principal son iguales. $A = A^t$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA, matriz cuadrada en la que los elementos a ambos lados de la diagonal principal son opuestos (iguales pero con distinto signo). Los elementos de la diagonal principal deben ser cero. $-A = A^t$

MATRIZ DIAGONAL matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR) todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal principal son cero.

3. Operaciones con matrices.

-Suma. Tienen que tener la misma dimensión. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Propiedades: Conmutativa, Asociativa, E. Neutro ($A + 0 = 0 + A$) y E. Opuesto ($A + (-A) = (-A) + A = 0$)

-Multiplicación de un n° por una matriz. $A = (a_{ij}) \rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Propiedades: $k \cdot (A + B) = kA + kB$, $(k + t) \cdot A = kA + tA$, $(k \cdot t) \cdot A = k \cdot (t \cdot A)$, $1 \cdot A = A$

-Multiplicación de matrices. Para multiplicar 2 matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p} \rightarrow A \cdot B = (c_{ij})_{m \times p}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

1ª FILA POR 1ª COLUMNA 1ª FILA POR 2ª COLUMNA 1ª FILA POR 3ª COLUMNA
2ª FILA POR 1ª COLUMNA 2ª FILA POR 2ª COLUMNA 2ª FILA POR 3ª COLUMNA

Propiedades: **No se cumple conmutativa** $A \cdot B \neq B \cdot A$, Si cumple Asociativa, Distributiva suma y E. Neutro.

-Potencia de una matriz. $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ..., $A^n = A^{n-1} \cdot A$

4. Propiedades de la matriz traspuesta.

Se llama matriz traspuesta (A^t) a la que se obtiene de cambiar las filas por las columnas o al revés.

Propiedades:

- 1) $(A^t)^t = A$
- 2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
- 3) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- 4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (**Cuidado, cambia el orden**)

5. Rango de una matriz.

El rango de una matriz A , $rg(A)$, es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

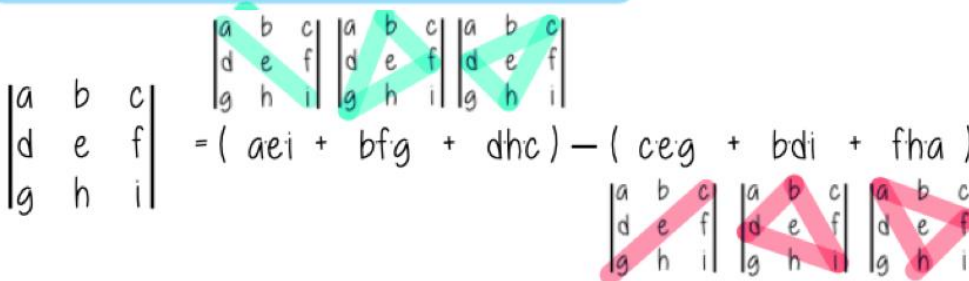
Método de Gauss: consiste en convertir la matriz inicial en una matriz triangular superior cuyos elementos por debajo de la diagonal sean ceros, utilizando las transformaciones elementales adecuadas. El rango de la matriz será el número de filas no nulas que tiene la matriz triangular que hemos obtenido.

6. Determinantes.

DETERMINANTES 2X2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

DETERMINANTES 3X3 - REGLA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha)$$


Propiedades:

- 1) $|A| = |A^t|$
- 2) Si permutamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo
- 3) Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por dicho número.
- 4) Si una matriz tiene 2 filas o 2 columnas iguales su determinante es 0.
- 5) Si una matriz tiene una fila o columna nula su determinante es 0.
- 6) Si 2 filas o 2 columnas son proporcionales su determinante es 0.
- 7) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

- 8) Si todos los elementos de una línea están formados por 2 sumandos, su determinante se descompone en la suma de 2 deter. con esos sumandos.

$$\begin{vmatrix} a+3 & 4 \\ b+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

- 9) Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas su determinante no varía.

- 10) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ // 11) Si una matriz tiene una línea que es C.Lineal de las otras paralelas entonces su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Matriz inversa. Propiedades.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n es otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **regulares o invertibles**, y las que no la tienen, matrices **singulares**. Una matriz cuadrada de orden n solo tiene inversa si $r(A) = n$.

Propiedades:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$ 2) $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$ 3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (**Cuidado, cambia el orden**)
4) $I^{-1} = I$ 5) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ 6) $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ 7) $|A^{-1}| = 1/|A|$

8. Formas de calcular la matriz inversa.

1º) Método de Gauss
ecuaciones)



2º) Aplicando la definición $A \cdot A^{-1} = I$ (con sistema

3º) **Usando determinantes** Si $|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$

- Menor complementario de $a_{ij} \rightarrow$

- Adjunto de $a_{ij} \rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

- Matriz Adjunta $\rightarrow Adj = (A_{ij})$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$: que se obtiene de quitar fila i y columna j

SIGNOS: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

MATRIZ ADJUNTA $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calculamos la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5 + 12 + 12 - (-30 - 2 + 12) = 29 - (-20) = 49 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Cálculo del determinante usando los adjuntos

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 + (-28) = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{31} + (-1) \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -28 + 2 + 1 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-25) = -25$$

DESARROLLARLO POR UNA LÍNEA Y SUS ADJUNTOS.

Ejemplo cálculo determinante de matriz 4x4 haciendo 0 en la 2ª fila (sumando C.Lineal de 1ª columna)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{21} =$$

$$= (-1) \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \right) = (32 - 20 - 2) - (-4 - 16 + 20) = 10 - 0 = 10$$

10. Rango de una matriz por determinantes

El rango de una matriz A será el orden (dimensión) de la mayor submatriz con determinante no nulo.

Empezaremos probando con el determinante de la mayor submatriz y si sale 0, iremos probando con determinantes de submatrices más pequeñas.

11. Ecuaciones matriciales.

Las resolveremos de la siguiente forma:

ECUACIONES MATRICIALES

$$AX=B, A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B, X=A^{-1} \cdot B$$

$$XA=B, XAA^{-1} = B A^{-1}, X = B A^{-1}$$

$$AX+B=C, AX=C-B, A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (C-B), X = A^{-1} \cdot (C-B)$$

Importante: Producto matrices no es conmutativo

Junio 2020/21

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A .
b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Solución:

Julio 2020/21

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A .
b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Solución:

Junio 2019/20

1. a) [1,25 puntos] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

Julio 2019/20

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A .
- b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

Solución:

Junio 2018/19

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A . **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. **(1,5 puntos)**

Solución:

Julio 2018/19

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

Solución:

Otros ejercicios propuestos:

Junio 2017/18

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. (1 punto)

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. (0,5 puntos)

Septiembre 2017/18

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. (1,25 puntos)

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. (1,25 puntos)

Junio 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. (1,5 puntos)

Septiembre 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . (1 punto)

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. (1,5 puntos)

PAEG JUNIO 2010 3B.

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$

Determina los valores a ; b ; $c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2,5 puntos) (Sol.: $(a, b, c) = (1, -2, 4)$)

PAEG JUNIO 2011 - 3A

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide :

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$

b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (Sol.: $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; b) $B^n = I$ si n es par; $B^n = B$ si n es impar)

JUNIO 2008

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Encuentra la expresión general de la potencia n -ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa. (NO)

(Sol.: a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $r(A) = 3$)

SEPT. 2007

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2 . (NO)

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2

(Sol.: b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 3A

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$?

(0,5 puntos)

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$ (1 punto)

c) Calcula la matriz X (1 punto) (Sol.: a) X del orden 2×3 ; b) $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$; c) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)

PAEG JUNIO 2016 3B Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10, \text{ donde } x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ calcula los determinantes}$$

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.}$$

(1,25 puntos por determinante) **(Sol.: a) 14; b) - 150)**

PAEG SEPTIEMBRE 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3 (1 punto)

b) Calcula X, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 punto)

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000} (0,5 puntos)

(Sol.: a) $X = 2A + I$; b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $|A| = -1$; $|A^{101}| = |A|^{101} = (-1)^{101} = -1$; $|A^{1000}| = 1$)

42.- PAEG JUNIO 2014 a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente

el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^T|$, $|A^3|$ (1 punto)

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (1,5 \text{ puntos}) \quad \text{(Sol.: a) } 5, 1/5, 5, 125; \text{ b) } -6, -800)$$

PAEG JUNIO 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1 punto)

b) Calcula X, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

(Sol.: a) $X = B(I - A)^{-1}$; b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$)

43.- PAEG SEPTIEMBRE 2014 3B

Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean soluciones del sistema matricial

$$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases} \quad \text{siendo } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } A = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix})$$

44.- PAEG SEPTIEMBRE 2014 3A

a) Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

b) ¿Para qué del parámetro $m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A? (0,5 puntos)

(Sol.: a) $m \neq 0, 6$ $R = 3$; $m = 0$ $m = 6$, $R = 2$; b) $m \neq 0, 6$ existe A^{-1})

Unidad 5. Sistemas de ecuaciones

1. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones. Dado sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de las incógnitas: Matriz de los términos independientes:

El sistema se puede expresar como $A \cdot X = B$

Si $B=0$ se dice que el sistema es **homogéneo**.

Si algún $b_i \neq 0$, se dice **no homogéneo**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. Tipos de sistemas según su solución

- **Sistema Compatible Determinado (SCD)**. Tiene una única solución.
- **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**. Tiene infinitas soluciones.
- **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene ninguna solución.

3. Métodos para resolver un sistema

1) **Método de Gauss**. Transformar el sistema en otro sistema escalonado equivalente.

2) **Método matricial, cuando A es cuadrada**.

Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ Existe $A^{-1} \rightarrow A \cdot X = B \rightarrow$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

3) **Regla de Cramer para SCD**.

$$x = \frac{|B \quad C_2 \quad C_3|}{|A|} \quad y = \frac{|C_1 \quad B \quad C_3|}{|A|} \quad z = \frac{|C_1 \quad C_2 \quad B|}{|A|}$$

4. Teorema de Rouché-Frobenius. Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, siendo A la matriz de coeficientes y $A^*=(A|B)$ la matriz ampliada, se cumple:

$$\text{rag}(A) = \text{rag}(A^*) = n \text{ (nº incógnitas)} \rightarrow \text{SCD (1 solución)}$$

$$\text{rag}(A) = \text{rag}(A^*) < n \text{ (nº incógnitas)} \rightarrow \text{SCI (infinitas soluciones)}$$

$$\text{rag}(A) \neq \text{rag}(A^*) \rightarrow \text{SI (1 no tiene solución)}$$

5. Discusión de un sistema en función de un valor k.

1) Estudiamos el $\text{rag}(A)$. Para ello vemos cuando $|A|=0 \rightarrow$ Obteniendo valores a, b, c donde vale 0.

2) Si $k \neq a, b, c \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rag}(A)=\text{rag}(A^*)=n \rightarrow \text{SCD (1 solución)} \rightarrow$ Resolver por Cramer sin sustituir k.

3) Si $k=a \rightarrow$ Estudiar $\text{rag}(A)$ que es $< n$ y $\text{rag}(A^*)$ y aplicar el T.Rouché-Frobenius.

Si $k=b \rightarrow$ Idem, Si $k=c \rightarrow$ Idem ...

Junio 2020/21

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a \cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases} .$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Solución:

Julio 2020/21

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}.$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

Junio 2019/20

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}.$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

Julio 2019/20

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}.$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

Junio 2018/19

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rclcl} ax & + & 2y & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. (1 punto)**Solución:**

Julio 2018/19

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. (1 punto)

Solución:

Otros ejercicios propuestos:

Junio 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 3y - az & = & 4 \\ x + ay + z & = & 2 \\ x + 4y - 5z & = & 6 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. (1 punto)

Septiembre 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & -4 \\ x - 4y - 3z & = & a^2 - 3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. (1 punto)

Junio 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} ax - y + z & = & a - 4 \\ 2x + y - az & = & a - 1 \\ y - z & = & -3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

Septiembre 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 0 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. (1 punto)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 3B

a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius (0,5 puntos)

b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser C. Determinado (0,5 p)

c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y - z + 2t & = & 2 \\ 5x + y + 2z & = & 1 \\ x + 8y - 5z + 6t & = & a \end{array} \right. \text{ es incompatible (1,5 puntos)}$$

PAEG JUNIO 2016 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

(Sol.: a) $m \neq 1$ SCD; $m = 1$ SCI; b) $(x, y, z) = (1 + \mu, 1 + 2\mu, \mu)$

PAEG SEPTIEMBRE 2015 3A.

a) Enuncia el Teorema de Rouche-Frobenius. (0,5 puntos)

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - az = 5 \end{cases}$ no es incompatible para ningún

valor $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

(Sol.: a) Teorema de Rouche-Frobenius Un sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada A/B; es decir: S es compatible $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B)$; b) $a \neq 2$ SCD; si $a = 2$ SCI; Sistema Compatible $\forall a \in \mathbb{R}$)

PAEG JUNIO 2015

He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como $100x + 10y + z$. (1,5 puntos)

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. (1 punto)

(Sol.: b) SCD c) 543)

PAEG JUNIO 2014

a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 5y + az = 4 \end{cases} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ es compatible indeterminado. Calcula } a \text{ y resuelve el sistema para}$$

dicho valor del parámetro (2 puntos)

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$ (0,5 puntos)

(Sol.: a) Si $a = 8$ SCI $(4 + \mu, 5\mu; 3\mu)$; b) $\mu=1$ $(5, 5, 3)$ y si $\mu = 3$ $(5, 5, 3)$)

PAEG RESERVA-2013 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

(Sol.: a) Si $m = 6$; SCD; $m \neq 6$ SI; b) $m = 6$ SCD (5, 4, 2)

PAEG-RESERVA-2013

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? (0,5 puntos)

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial

$x = y = z = 0$. (1 punto)

c) Resuelve el sistema para todos los valores de m de $\mathbb{R}$. (1 punto)

(Sol.: a) Nunca puede ser incompatible. B) Si no tiene solución trivial SCI $R(A) \leq 2$, si $m = -1$ SCI,

$(-3\mu, 5\mu, 2\mu)$; c) $m \neq -1$, SCD y tiene la solución trivial)

PAEG-SEPTIEMBRE-2013 3B

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado (1 punto)

PAEG JUNIO-2012 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ mx + (m+1)y + (m-1)z = m-2 \\ 3x + (m+3)y + 4z = m-2 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

Unidad 6 - 7. Vectores. Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos.

Esquema de repaso:

1. Vector en el espacio.

- Llamaremos **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado de origen A y extremo B
- Diremos que 2 vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.
- Llamaremos **vector libre** $\vec{v}$ al conjunto de todos los vectores equipolentes.
- Las **coordenadas del vector** $\overrightarrow{AB}$ se calculan haciendo $B-A = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$.



2. Vectores L.Dep/Independientes.

- Un vector $\vec{w}$ se dice que es **C.Lineal** de un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ si es posible encontrar números reales $k_1, k_2, \dots, k_n$ tal que $k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = 0$.
- Un conjunto de vectores son **L.Dependientes** si cualquier de ellos se puede poner como C.Lineal de los demás.
- Un conjunto de vectores son **L.Independientes** si ninguno se puede expresar como C.Lineal de los demás.

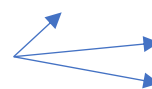
¿Cómo saber cuales son L.Independientes?

Para determinar la dependencia lineal de un grupo de vectores, los colocamos como filas de una matriz A. El rango de esa matriz es el número de vectores L.Independientes.

Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ Son todos L.Independientes.

Observación:

- Tres vectores son L.Dependientes si son paralelos (están en el mismo plano: coplanarios).
- Tres vectores son L.Independientes si están en planos distintos.

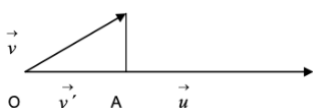


3. Base en el espacio. Coordenadas de un vector

- Una **base en el espacio** es un conjunto de 3 vectores L.Independientes entre sí de forma que cualquier vector se puede expresar como C.Lineal de ellos.
- Si 3 vectores son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**. Si además tienen módulo 1 forman una **base ortonormal**.
- La **base canónica** es $\vec{i}(1,0,1), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$
- Dada la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, cualquier vector $\vec{p}$ se expresa de forma única como $\vec{p} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Diremos que (a,b,c) son las **coordenadas de $\vec{p}$ respecto a esa base**.

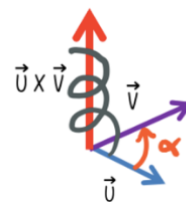
4. Producto escalar.

- Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v})$
- Expresión analítica $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- Módulo de $\vec{u} \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- Ángulo de 2 vectores $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- Interpretación geométrica del producto escalar: Producto escalar es el producto del módulo de un vector por el módulo de la proyección del otro $\vec{v}'$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



5. Producto vectorial.

- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de sentido igual al avance de un sacacorchos al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ y de módulo $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\widehat{u,v})$.

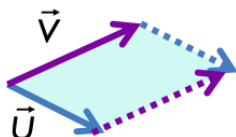


- Expresión analítica:

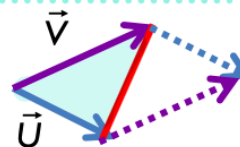
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

6. Aplicaciones del producto vectorial. Propiedades.

$$\text{Área de un paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



$$\text{Área de un triángulo} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$



Propiedades

- 1) $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = 0 \text{ ó } \vec{v} = 0 \text{ ó } \vec{u} = k\vec{v}$ (paralelos) // 2) Anticonmutativa $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ // 3) Distributiva
- 4) $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$ // 5) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{u} \times \vec{v}$

7. Producto mixto.

Interpretación geométrica:

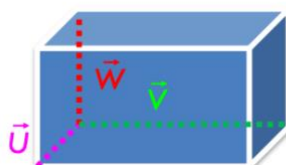
Producto mixto a $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\text{Expr. analítica } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

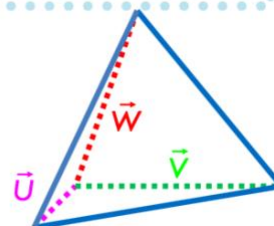
Propiedades

- 1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ (Propiedad Deter)
- 2) 3 vectores L.Dep (coplanarios) $\rightarrow$ su producto mixto es 0.

$$\text{VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO} \\ |\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$$



$$\text{VOLUMEN DE UN TETRAEDRO} \\ \frac{|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|}{6}$$



8. Ecuaciones de la recta en el espacio.

Punto $A(x_0, y_0, z_0)$

Vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

Si no tienes el vector, con dos puntos de la recta puedes hallarlo $\vec{AB}$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad t \in \mathbb{R}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Igualdad de vectores

PARA OBTENER PUNTOS DE LA RECTA BASTA CON QUE DES VALORES A LA t

ECUACIÓN CONTINUA
$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

Despejo t e igualo

Tres puntos A, B y C están alineados si $\text{rag}(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1$

ECUACIÓN IMPLÍCITA
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

Igualo dos a dos para obtener las dos ecuaciones

RESUELVE EL SISTEMA PARA HALLAR PUNTOS DE LA RECTA (RECUERDA QUE ES S.C.I. — 1 PARÁMETRO)

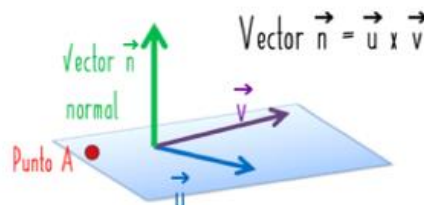
9. Ecuaciones del plano en el espacio.

Punto A (x_0, y_0, z_0)

Dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3) + s \cdot (v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{cases}$$



ECUACIÓN IMPLÍCITA
$$Ax + By + Cz = D$$

Vector $\vec{n} = (A, B, C)$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación conocido punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y vector normal $\vec{n}(a, b, c)$
 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

Obs: 4 puntos A, B, C y D coplanarios $\rightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$

10. Posición relativa de 2 rectas el espacio.

- Posibles posiciones: Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan



- Estudio mediante vectores directores y puntos que las determinan. $r: \langle A, \vec{u} \rangle$, $s: \langle B, \vec{v} \rangle$

I. Si $\vec{u} // \vec{v} \rightarrow$ Coincidentes (si A pertenece a s) y paralelas (si A no pertenece a s)

II. Si $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v} \rightarrow$ Se cortan si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son L.Dep $\rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$

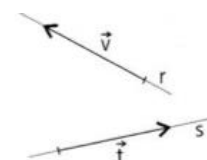
Se cruzan si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$

- Estudio con los rangos a partir de vectores directores y puntos

$$r: \langle A, \vec{u} \rangle, s: \langle B, \vec{v} \rangle \rightarrow M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad M/N = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a_1 - b_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 - b_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

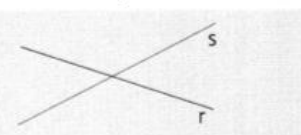
$$\text{rang}(M) = 2 \quad \text{y} \quad \text{rang}(M/N) = 3$$

Las rectas se cruzan.



$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

Las rectas se cortan en un punto.



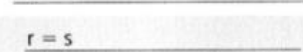
$$\text{rang}(M) = 1 \quad \text{y} \quad \text{rang}(M/N) = 2$$

Las rectas son paralelas.



$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Las rectas son coincidentes.



- Estudio con rangos con rectas con ecuación en forma implícita

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

I. Si $\text{rag}(M)=3$ y $\text{rag}(A)=4 \rightarrow$ SI (S. Incompatible) - Se cruzan

II. Si $\text{rag}(M)=3=\text{rag}(A) \rightarrow$ SCD (S. Compatible Determinado) - Secantes

III. Si $\text{rag}(M)=2$ y $\text{rag}(A)=3 \rightarrow$ SI (S. Incompatible) - Paralelas

IV. Si $\text{rag}(M)=2=\text{rag}(A) \rightarrow$ SCI (S. Compatible Indeterminado) - Coincidentes

11. Posición relativa de 2 planos en el espacio.

- Estudio mediante vectores normales. $\Pi_1: \langle A, \vec{n}_1 \rangle$, $\Pi_2: \langle B, \vec{n}_2 \rangle$

I. Si $\vec{n}_1 // \vec{n}_2 \rightarrow$ Coincidentes (si A pertenece a Π_2) y paralelos (si A no pertenece a Π_2)

II. Si $\vec{n}_1$ no es paralelo a $\vec{n}_2 \rightarrow$ Se cortan en una recta.

- Estudio con los rangos a partir de las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi: A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$(M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

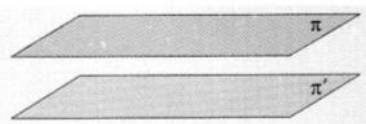
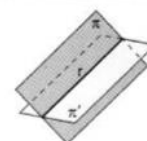
Los dos planos se cortan en una recta.

$$\text{rang}(M) = 1 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 2$$

Los dos planos son paralelos.

$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Los dos planos son coincidentes.



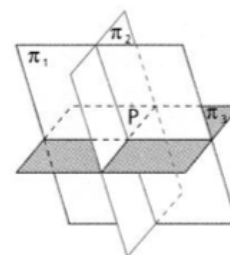
12. Posición relativa de 3 planos en el espacio. Ecuaciones en forma implícita

$$\begin{cases} \pi_1: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2: A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3: A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

$$(M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}(M/N)$$

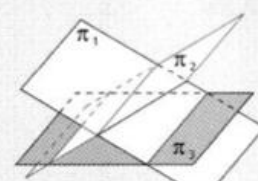
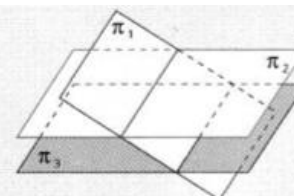
Los tres planos se cortan en un punto.



Dos planos son paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas.

$$\text{rang}(M) = 2 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 3$$

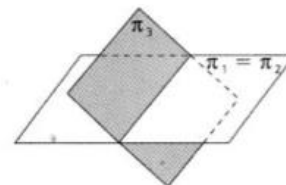
Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.



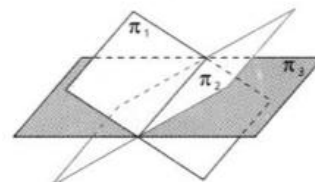
12. Continuación ... (Posición relativa de 3 planos en el espacio)

$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

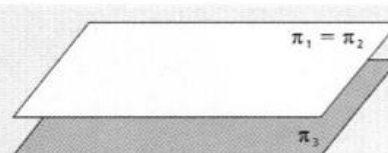


Los tres planos se cortan en una recta

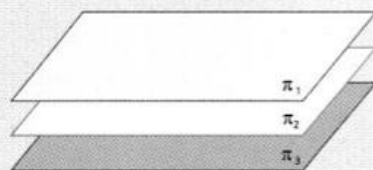


$$\text{rang}(M) = 1 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 2$$

Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo.

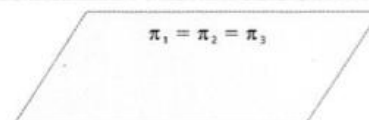


Los tres planos son paralelos.



$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Los tres planos son coincidentes.



13. Posición relativa de recta y plano.

- Estudio con $\vec{d}$ vector director de la recta y $\vec{n}$ vector normal plano. Si $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares y por tanto, son coincidentes o paralelas (falta ver un punto de una en la otra). Si $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0 \rightarrow$ Secantes.

- Estudio con rangos con ambas ecuaciones expresadas en forma implícita.

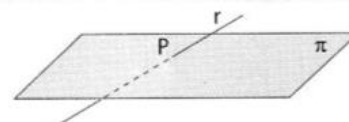
$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$r: \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

$$(M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right)$$

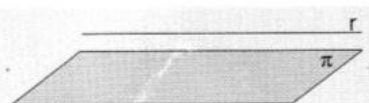
$$\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}(M/N)$$

La recta y el plano se cortan en un punto.



$$\text{rang}(M) = 2 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 3$$

La recta y el plano son paralelos.



$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

La recta está contenida en el plano.



14. Haz de planos.

- Haz de planos paralelos. La ecuación del haz de planos paralelos a uno dado $p : Ax + By + Cz + D = 0$ es de la forma $Ax + By + Cz + K = 0$. Para determinar K , necesitamos un punto del plano del haz, que sustituiremos en la ecuación del plano del haz.

- Haz de planos secantes en una recta.

Sea la recta $r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

El haz de planos que se cortan en la recta r tiene la siguiente expresión:

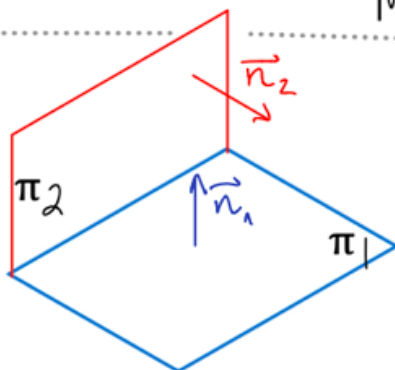
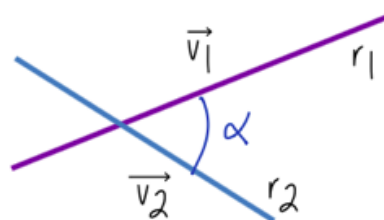
$$\alpha (Ax + By + Cz + D) + \beta (A'x + B'y + C'z + D') = 0, \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \text{ números reales.}$$

La ecuación del haz engloba al conjunto de planos que se cortan en r .

15. Ángulos entre rectas y planos.

Ángulo entre dos rectas

$$\cos(\alpha) = \cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

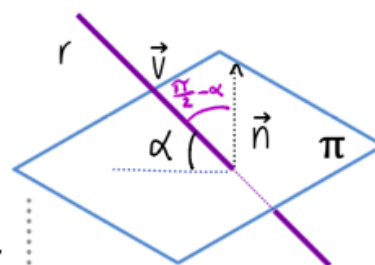


Ángulo entre dos planos

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Ángulo entre recta y plano

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right| = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|}$$



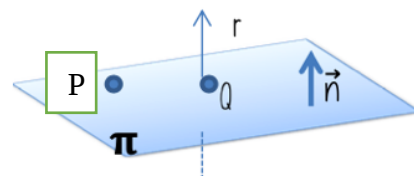
16. Distancias entre puntos, rectas y planos.

- **Distancia entre 2 puntos** $\rightarrow d(A,B)=|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

- **Distancia entre punto y recta** $\rightarrow P \text{ y } r: \langle A, \vec{u} \rangle \rightarrow d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{AO} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

Otro método:

- 1) Hallar plano Π perpendicular a r y que contiene a P
(Vector normal al plano = Vector de la recta)
- 2) Calcular punto Q intersección de r y Π
- 3) $d(P,r)=d(P,Q)$



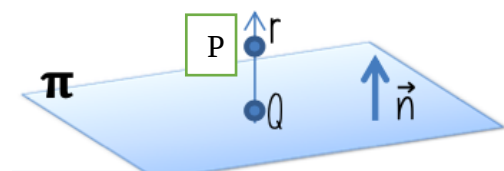
Proyección ortogonal de un punto P a una recta r $\rightarrow$ Calcular plano perpendicular a r que pasa por P y hacer la intersección con la recta r .

- **Distancia de un punto P a un plano Π** $\rightarrow P(x_1,y_1,z_1), \Pi: Ax+By+Cz+D=0$

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Otro método:

- 1) Hallar la recta r perpendicular a Π que pasa por P
- 2) Hallar Q la intersección de la recta r con el plano Π
- 3) $d(P, \Pi)=d(P,Q)$



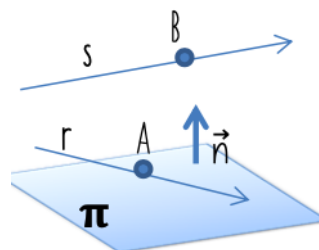
Proyección ortogonal de la recta r sobre el plano Π $\rightarrow$ Es la recta intersección del plano Π con un plano Π' perpendicular a Π que contiene a la recta r .

- **Distancia entre 2 rectas r y s.**

$r//s$ (paralelas) $\rightarrow$ cogemos un punto de r y hallamos la distancia a s

r no paralela a $s \rightarrow$

Hallamos plano Π paralelo a s que contiene a r ($\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$) $\rightarrow d(r,s)=d(s, \Pi)$



Otro método: $d(r,s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área Base}} = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$ con A y B puntos cualquiera de r y s

- **Distancia de una recta r a un plano Π .**

Si se cortan $d(r, \Pi)=0$. Si no se cortan, $d(r, \Pi)=d(P, \Pi)$, P un punto de la recta.

- **Distancia entre 2 planos Π y Π' .**

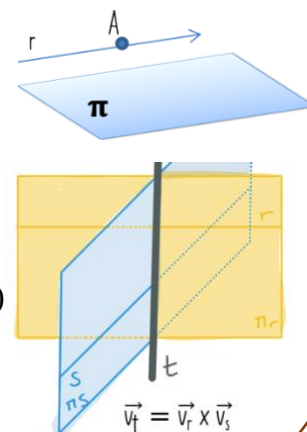
Si $\Pi//\Pi'$ y P es un punto de $\Pi \rightarrow d(\Pi,\Pi')=d(P, \Pi')$

- **Recta perpendicular a 2 rectas que se cruzan.**

Hallar plano Π_r que contiene recta r y vector $\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$ (perpendicular a r y s)

Hallar plano Π_s que contiene s y vector $\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$ (perpendicular a r y s)

La recta perpendicular t es la intersección de Π_r y Π_s



Junio 2020/21

4. a) [1,25 puntos] Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .
- b) [1,25 puntos] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución:

Junio 2020/21

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

- [1,25 puntos] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
- [1,25 punto] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .

Solución:

Julio 2020/21

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

- a) [1 punto] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- b) [1,5 puntos] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .

Solución:

Junio 2019/20

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

- a) [1 punto] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.
- b) [1,5 puntos] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución:

Junio 2019/20

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x &= -1 + \mu \\ y &= 1 + \lambda + a\mu \\ z &= 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y &= 1 - b \\ z &= -3 \end{cases}$.

- a) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .
- b) [1 punto] Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s .

Solución:

Julio 2019/20

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .
- b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Solución:

Julio 2019/20

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

- a) [1,25 puntos] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .
- b) [1,25 puntos] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

Solución:

Junio 2018/19

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 2)$, $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:

- a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D . **(1,25 puntos)**
- b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D . **(1,25 puntos)**

Solución:

Junio 2018/19

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.

- a) Calcula la distancia del punto P a la recta r . **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q , siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P . **(1,25 puntos)**

Solución:

Julio 2018/19

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π . **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r . **(1,25 puntos)**

Solución:

Julio 2018/19

- 4B.** a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a , b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
- b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

Solución:

Junio 2017/18

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:

- a) Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**
- b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)**

Solución:

Junio 2017/18

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (2, 0, 3)$:

- a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
- b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
- c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

Solución:

Septiembre 2017/18

4A. Dados los puntos $A(-1, 3, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$

- a) Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(0,75 puntos)**
- b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. **(0,75 puntos)**
- c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r . **(1 punto)**

Solución:

Otros ejercicios propuestos:

Septiembre 2017/18

4B. Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 0, -4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB . **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A . **(1 punto)**

Junio 2016/17

4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1 punto)**

Junio 2016/17

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

Septiembre 2016/17

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

- a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

Septiembre 2016/17

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

- b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

JUNIO 2016 4A

Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $v(1, -1, 0)$

a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$ (1,5 puntos)

b) Calcula el punto simétrica de Q respecto a r . (1 punto)

(Sol.: a) $R(1/2, 1/2, 1)$; b) $Q'(1, 1, 1)$

JUNIO 2016 4B

Dados los planos

$$\pi : ax + y + 2z = 2 \quad \pi' : x + y + z = 0 \quad y \quad \pi'' : x + ay + z = a \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}, \text{ se pide:}$$

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1,5 puntos)

b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π' y π'' . (1 punto)

(Sol.: a) $a \neq 1, 2$ Se cortan en un punto los tres planos, si $a = 1$ π' y π'' son paralelos y π los corta en dos rectas paralelas; si $a = 2$ se cortan dos a dos en tres rectas paralelas)

SEPTIEMBRE 2016 4A

Dadas las rectas

$$r: 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \quad y \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2\gamma \\ y = -1 + \gamma \\ z = c - 3\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R} \text{ donde } c \in \mathbb{R}, \text{ se pide:}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)

b) Halla el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. (1 punto)

(Sol.: a) $c \neq 3$ las rectas se cruzan; b) $c = -9$, punto de corte $P(3, 1, -3)$)

SEPTIEMBRE 2016 4B

Dados los planos

$$\pi : 2x - 3y + z = 0 \quad y \quad \pi': \begin{cases} x = 1 + \mu + \gamma \\ y = \mu - \gamma \\ z = 2 + 2\mu + \gamma \end{cases} \quad \mu, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y el punto } P(2, -3, 0)$$

a) Hallas la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π' (1,5 puntos)

b) Calcular el ángulo entre los planos π y π' (1 punto)

(Sol.: a) Para conocer el vector director de π' se hallará el producto vectorial de los vectores que lo engendran

$$v = (5, 7, 11), r: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}; b) 4^\circ 5' 46''$$

JUNIO 2015 4A.

a) Calcula la distancia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta $\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ (1,25 puntos)

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r . (1,25 puntos)

(Sol.: a) Hallaremos un plano π que contenga el punto P y que sea perpendicular a la recta dada. Una vez hallado el plano se calculará el punto Q de intersección del plano y la recta, el módulo del vector PQ es la distancia pedida.

$\Pi: x - y + z + 3 = 0$; $d = \sqrt{2}$ u; b) $P'(1, 2, -2)$)

JUNIO 2015 4B.

Dados los puntos $A(1, \lambda + 1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda + 2, 0, 1)$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que A , B y C estén alineados. (1,25 puntos)

b) Para $\lambda = -1$, da la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A , B y C . (1,25 puntos)

(Sol.: a) $\lambda = 1$; b) Para determinar el plano π debemos de hallar los vectores AB , AC y AG , siendo G el punto generador del plano. $\Pi: x + y - 1 = 0$)

SEPTIEMBRE 2015 4A.

Dada la recta $r = \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$

a) Da la ecuación implícita del plano Π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2, 1, 1)$ (1,25 puntos)

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de Π con los ejes coordenados (1,25 puntos)

(Sol.: a) El plano buscado π como vector director el de la recta r , que es perpendicular al vector PG , siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación pedida del plano.

$\Pi: x + 3y + z - 6 = 0$; b) $V = (1/6) \cdot 72 = 12$ u³)

SEPTIEMBRE 2015 4B.

Dados el planos $\pi \equiv x + ay + 3z = 2$, $a \in \mathbb{R}$ y la recta $r = \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente. (1,25 puntos)

b) Halla a para que π y r sean paralelos (1,25 puntos)

(Sol.: a) Los vectores directores de la recta y el plano que cumplen la condición de perpendicularidad son iguales o proporcionales $a = 2$; b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y, por ello, su producto escalar ($\bullet$) es nulo, $a = -5$)

JUNIO 2014 4A

a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$ se corten en un punto (1,25 puntos)

b) Para dicho valor de a da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s . (1,25 puntos)

(Sol.: a) $a = -1$; b) $\pi: x + 2y - z - 1 = 0$)

JUNIO 2014 4B

Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$ se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelas (0,75 puntos)

b) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π se corten perpendicularmente (0,75 puntos)

c) Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π (1 punto)

(Sol.: a) $a = 3$; b) No son perpendiculares; c) $\pi' = x + y + 1 = 0$)

SEPTIEMBRE 2014 4A.

a) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv x = -y = z$ y $s \equiv x = y = z - 2$ (1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre r y s . (1,25 puntos)

(Sol.: a) Las rectas r y s se cruzan en el espacio; b) Calcularemos un plano π que contenga a la recta s y sea paralelo a la recta r . Tomaremos un punto R cualquiera de la recta r (el indicado en su ecuación, por ejemplo) y hallaremos la distancia de este punto al plano $\pi: x - z - 2 = 0$, que es la distancia buscada. $d(r, s) = \sqrt{2} u$)

80.- SEPTIEMBRE 2014 4B.

a) Estudia la, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - z = 3 \\ \pi_2 \equiv x - y + az = -1 \\ \pi_3 \equiv ax + y - z = 5 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Calcula, en función del parámetro a , la distancia entre los planos π_1 y π_2 . (1 punto)

(Sol.: a) $a = 1$, π_1 y π_3 son planos paralelos, π_1 y π_2 se cortan en una recta y π_2 y π_3 se cortan en una recta; si $a \neq 1$ se cortan en un punto; b) $a \neq 1$ los dos planos se cortan en una recta; si $a = 1$ los dos planos son paralelos y la distancia es $\frac{2\sqrt{3}}{3} u$)

Unidad 8. Estadística y probabilidad.

1. Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.

EXPERIMENTO ALEATORIO Un fenómeno o experiencia se dice aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado. Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia antes de realizarla, se dice que el experimento es determinista.

ESPACIO MUESTRAL es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y se representa por Ω o E .

SUCESO ALEATORIO Es un suceso que ocurrirá o no dependiendo del azar.

SUCESO ELEMENTAL Cada elemento del espacio muestral E se llama suceso elemental.

El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama **ESPACIO DE SUCESOS S** . Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral. Si la experiencia aleatoria: lanzar una moneda $E = \{c, x\}$, el espacio de sucesos $S = \{\emptyset, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$

2. Tipos de sucesos

Suceso elemental formado por un solo elemento $A = \{3\}$

Suceso compuesto: formado por dos o más elementos $B = \{3, 5\}$

Suceso imposible es aquel que nunca se realiza, se representa por $\emptyset$.

Suceso seguro es el que se realiza siempre, Ω o E .

Suceso contrario o complementario de A y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A . Sea $E = \{3, 4, 7, 8\}$ siendo $A = \{3\}$, el suceso contrario a A sería $\bar{A} = \{4, 7, 8\}$.

3. Operaciones con sucesos

Suceso unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando lo hacen A ó B (o ambos). Se representa por $A \cup B$

Suceso intersección de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza a la vez el suceso A y el suceso B . Se representa por $A \cap B$.

Diferencia de sucesos: $A - B$ (se lee A menos B) es el suceso formado por los todos los casos de A que no son de B .

$$A - B = (A \cap \bar{B})$$

Sucesos incompatibles: dos sucesos, A y B , se llaman incompatibles cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

Sucesos compatibles: dos sucesos A y B son compatibles si pueden obtenerse simultáneamente. Es decir

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

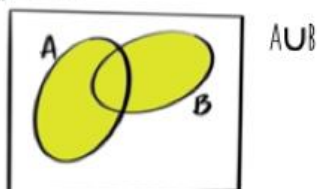
Algunas propiedades importantes

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

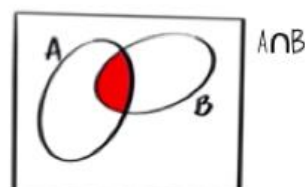
- Leyes de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Continuación (Operaciones con sucesos)

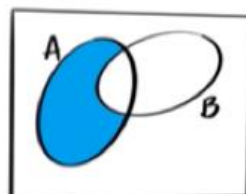
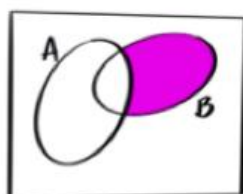
UNIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B y se representa por $A \cup B$, al suceso formado por todos los elementos de A y/o de B .



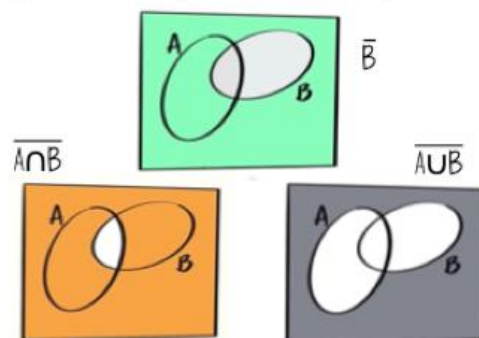
INTERSECCIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso intersección de A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que está formado por todos los elementos de A y de B simultáneamente.



DIFERENCIA DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso diferencia de A y B y se representa por $A \setminus B$ o $A - B$, al suceso $A \cap \bar{B}$. O sea, $A \setminus B$ está formado por todos los elementos de A que no están en B .



COMPLEMENTARIO Dado el suceso A se llama suceso complementario de A , $\bar{A}$, al suceso formado por los elementos de E que no están en A .



SUCESOS INCOMPATIBLES Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Un suceso y su contrario son siempre incompatibles



4. Frecuencia Absoluta y relativa de un suceso A

Se llama **FRECUENCIA ABSOLUTA** f_a de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **FRECUENCIA RELATIVA** f_r de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento: $f_r = \frac{f_a}{n}$, siendo n el número de veces que se repite el experimento.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número, a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente: $\lim f_r(S) = P(S)$. A este número lo llamamos **PROBABILIDAD DEL SUCESO S**.

Propiedades

- $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- $f_r(E) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

5. Definición axiomática de probabilidad

Se puede definir la probabilidad como una función P que a cada suceso A le asigna un número real $P(A)$ que cumple 3 axiomas:

Axioma 1: La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1. $P(E) = 1$

Axioma 2: Cualquiera que sea el suceso A , su probabilidad es un número no negativo. $P(A) \geq 0$

Axioma 3: Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPIEDADES

- $P(\emptyset) = 0$ • $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si A y B son dos sucesos tales que $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

8. Probabilidad condicionada

Se llama **PROBABILIDAD CONDICIONADA DEL SUCESO A RESPECTO DEL SUCESO B** a la probabilidad de A sabiendo que ocurrió B , la denotaremos por $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ siempre que } P(B) \neq 0$$

De lo anterior se deducen claramente las relaciones siguientes

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Si fuesen tres sucesos $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

Dos sucesos A y B se dicen **INDEPENDIENTES** si $P(B) = P(B|A)$
También se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

6. Regla de Laplace

LEY DE LAPLACE

Si los resultados de una experiencia aleatoria son casos equiprobables, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables a } A}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$

7. Diagrama de árbol

Es una forma de organizar el planteamiento de un problema de probabilidad de manera que el experimento se va ramificando a medida que se van sucediendo las pruebas (lanzamientos, extracciones, tiradas, ...).

Sobre cada rama se va anotando la probabilidad de que el suceso correspondiente se produzca. Finalmente, la probabilidad de llegar a un determinado resultado es el producto de todas las probabilidades de las ramas que llevan a ese resultado.

9. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia nos servirán de apoyo en la aplicación de la probabilidad condicionada. Estas tablas, de fácil manejo, nos permiten calcular una probabilidad condicionada fácilmente.

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

10. Teorema de la probabilidad total

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.
Entonces,

$$P(S) = P(A_1 \cap S) + P(A_2 \cap S) + \dots + P(A_n \cap S) = P(A_1) \cdot P(S|A_1) + P(A_2) \cdot P(S|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(S|A_n)$$

11. Teorema de Bayes (Prob. A “posteriori”)

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Entonces,

$$P[A_i / S] = \frac{P(A_i) \cdot P(S/A_i)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$

12. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Si los resultados son finitos o infinitos numerables, la variable aleatoria se denomina discreta. Si los resultados son infinitos, la variable aleatoria es continua.

13. Variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, se llama función de probabilidad o función de masa, a aquella función que hace corresponder a cada valor de la variable con su probabilidad. $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$

Propiedades de la función de probabilidad

a) $p_i \geq 0$ b) $\sum p_i = 1$

Esperanza y varianza de la v.a

Esperanza $\mu = E[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

Varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

Función de distribución

Es la función acumulada $F(x) = P(X \leq x)$

Ejemplo

X = resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ejemplo

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$x_i p_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
$x_i^2 p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

$$E(X) = 21/6$$

$$Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 = 105/36 = 2,92$$

Ejemplo

X = lanzar un dado

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$F(x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

14. Modelos probabilísticos discretos.

14.1 Modelo Bernoulli. Experimento aleatorio con 2 posibles resultados: éxito (1) o fracaso (0). X variable aleatoria con 2 valores, 0 fracaso y 1 éxito para un suceso A .

$$P(x=0)=1-p=q, \quad P(x=1)=p$$

$$X \sim \text{Bern}(p)$$

x	0	1
Probab.	$1-p=q$	p

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p-p^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

14.2 Modelo Binomial. Consiste en repetir n veces un experimento Bernoulli de parámetro p en las mismas condiciones de independencia. La variable $X = n^\circ$ veces que ocurre con éxito el suceso A será una binomial de parámetros n y p . $X \sim B(n, p)$. $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$P(X=a) = \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} \quad \text{donde} \quad \binom{n}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = npq$$

Ejemplo

El 20% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Definimos $X = n^\circ$ de personas que están viendo el programa $\sim \text{Bin}(10, 0.20)$ donde $p=0.2$ es la probabilidad de éxito (ver concurso de tv). $\text{Rec}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a) Calcula la probabilidad de que ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0.2^8 \cdot (1-0.2)^2 = 0.000074$$

b) Calcula la probabilidad de que más de ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>8) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} \cdot 0.2^9 \cdot (1-0.2)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.2^{10} \cdot (1-0.2)^0 = 0.000004 + 0.0000001$$

$$= 0.0000041$$

c) Calcula la probabilidad de que algunas de las diez personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.2^0 \cdot (1-0.2)^{10} = 1 - 0.11 = 0.89$$

c) Calcular la media y la varianza $E(X) = 10 \cdot 0.20 = 2$ $\text{Var}(X) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6$

15. Variable aleatoria continua.

Una **variable aleatoria** es continua cuando puede tomar un número infinito de valores en la recta real. La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama **distribución de probabilidad continua**. En una distribución continua la probabilidad de un valor concreto es cero. En este caso, las probabilidades que calculamos están siempre asociadas a intervalos: $P(a \leq X \leq b)$

Función de distribución $\rightarrow$ Es la función acumulada $F(x) = P(X \leq x)$

Función de probabilidad o función de densidad $\rightarrow f(x) = F'(x) \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

Propiedades

$$a) f(x) \geq 0 \quad b) P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) \quad c) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad d) P(X=a) = 0$$

Esperanza y varianza de la v.a

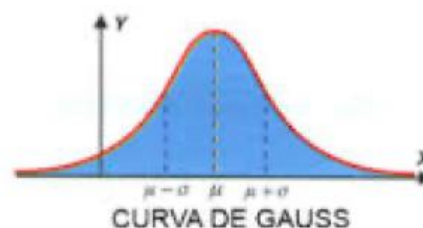
$$\text{Esperanza } \mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad // \quad \text{Varianza } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

16. Modelos probabilísticos continuos: Normal.

Diremos que una distribución de probabilidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , y lo representaremos por $N(\mu; \sigma)$ cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica respecto a la media, de máximo en la media, y que tiene 2 puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media ($\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ respectivamente).

Definición. Una variable aleatoria continua, con media μ y con desviación típica σ , es una variable normal si su función de densidad,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ es: } f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$



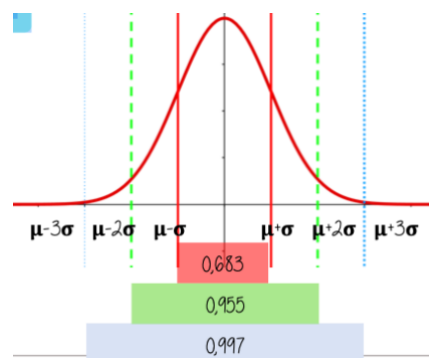
Propiedad. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

Regla 68-95-99

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \begin{cases} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683 \\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,955 \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997 \end{cases}$$

Normal tipificada $N(0,1)$

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$



CALCULO DE PROBABILIDADES EN LA DISTRIBUCION N(0,1)

$$Z \sim N(0,1)$$

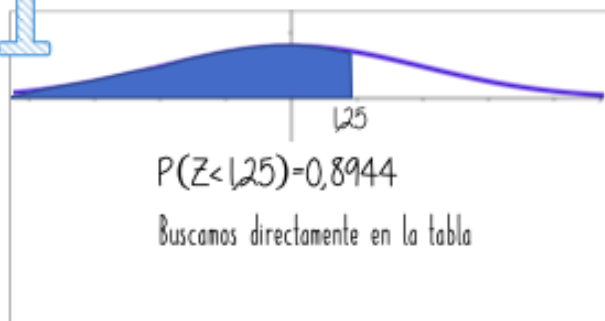
$$P(-\infty < Z < \infty) = 1$$

$$P(Z > 0) = 0,5$$

$$P(Z < 0) = 0,5$$

0

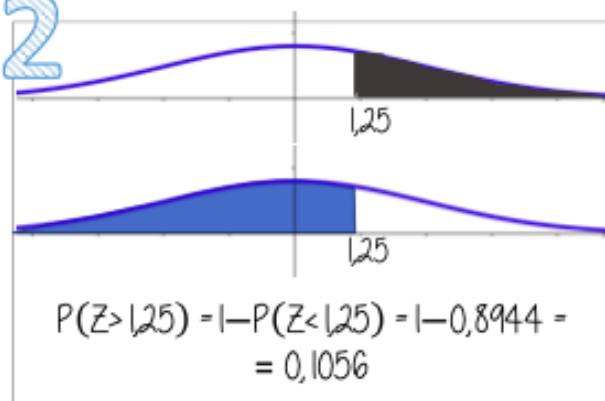
1



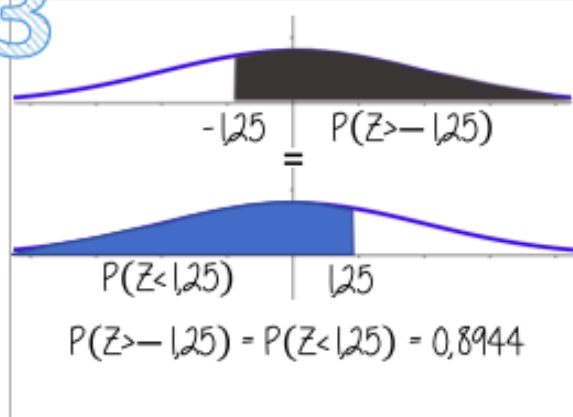
z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6701	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7546
0.7	0.7577	0.7607	0.7637	0.7667	0.7696	0.7725	0.7754	0.7783	0.7811	0.7839
0.8	0.7867	0.7895	0.7923	0.7950	0.7977	0.8004	0.8031	0.8058	0.8085	0.8112
0.9	0.8139	0.8166	0.8192	0.8218	0.8244	0.8269	0.8294	0.8319	0.8344	0.8369
1.0	0.8394	0.8419	0.8444	0.8468	0.8493	0.8517	0.8541	0.8564	0.8588	0.8612
1.1	0.8636	0.8659	0.8681	0.8704	0.8726	0.8748	0.8769	0.8790	0.8811	0.8832
1.2	0.8853	0.8874	0.8895	0.8915	0.8935	0.8955	0.8974	0.8993	0.9012	0.9031
1.3	0.9049	0.9068	0.9086	0.9104	0.9122	0.9140	0.9157	0.9174	0.9191	0.9208
1.4	0.9225	0.9242	0.9259	0.9275	0.9291	0.9308	0.9324	0.9341	0.9357	0.9374
1.5	0.9389	0.9406	0.9422	0.9438	0.9453	0.9469	0.9484	0.9499	0.9515	0.9530
1.6	0.9545	0.9560	0.9575	0.9590	0.9605	0.9620	0.9635	0.9649	0.9664	0.9678
1.7	0.9691	0.9706	0.9720	0.9734	0.9748	0.9761	0.9774	0.9788	0.9799	0.9813
1.8	0.9826	0.9839	0.9851	0.9864	0.9876	0.9888	0.9898	0.9909	0.9919	0.9929
1.9	0.9938	0.9947	0.9956	0.9964	0.9972	0.9979	0.9986	0.9990	0.9994	0.9997
2.0	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

En la tabla buscamos $P(Z < a)$,
siendo a un nº positivo

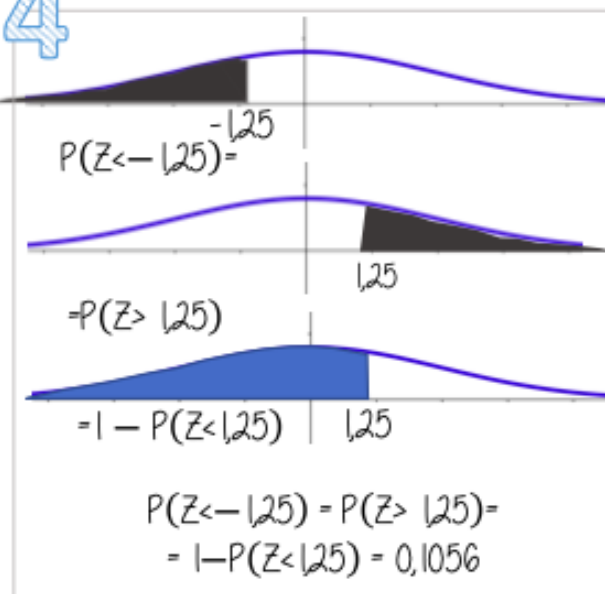
2



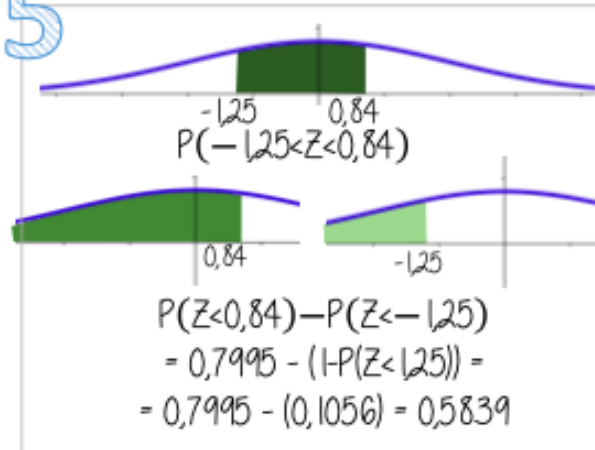
3



4



5



Junio 2020/21

8. a) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
- b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
		0	1	2	3	4	0	1	2	3
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Julio 2020/21

8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
- b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k	p								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Junio 2019/20

8. a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,
- a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?
- b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k	p												
		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio 2019/20

8. a) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:
- a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
- a.2) [0,75 puntos] Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?
- b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Junio 2018/19

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2018/19

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Julio 2018/19

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A)=0,75$ y $P(B)=0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A | B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A | B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Julio 2018/19

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2017/18

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina

A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2017/18

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

- a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**
- a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

- b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**
- b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2017/18

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10 % y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4 % y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

b) Una parte de un examen consta de cinco preguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

n	k	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Otros propuestos:

Septiembre 2017/18

5B. a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2016/17

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

(0,5 puntos)

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2016/17

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2016/17

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

