

# 2º Bach CCNN

**CUADERNILLO DE CLASE**

Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

# MATEMÁTICAS



## Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Está permitido copiar y fotocopiar esta obra, total o parcialmente, con el objetivo de que sea accesible para el alumnado.

-  **Reconocimiento (Attribution):** En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.
-  **No Comercial (Non commercial):** La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.
-  **Compartir Igual (Share alike):** La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas



**Reconocimiento – NoComercial – SinObraDerivada (by-nc-nd):** No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

**Profesor:**

.....

### **Materiales utilizados:**

Material de ejercicios y problemas de D. Jose Luis Hernández Quintanilla (IES Melchor de Macanaz)  
Material organizado y estructurado por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)



## UNIDADES DEL CURSO:

### UNIDAD 1. LÍMITES. CONTINUIDAD.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<b><u>Nota Unidad</u></b>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 2. DERIVADAS.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<b><u>Nota Unidad</u></b>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 3. INTEGRAL INDEFINIDA. INTEGRAL DEFINIDA.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<b><u>Nota Unidad</u></b>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 4. MATRICES. DETERMINANTES.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<b><u>Nota Unidad</u></b>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 5. SISTEMAS DE ECUACIONES.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<b><u>Nota Unidad</u></b>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 6. VECTORES. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<u>Nota Unidad</u>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 7. PROBLEMAS MÉTRICOS.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<u>Nota Unidad</u>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 8. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b><u>Comentario:</u></b>	<u>Nota Unidad</u>
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

## UNIDAD 1. LÍMITES. CONTINUIDAD.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
1.1 Concepto de límite de una función. 1.2 Cálculo de límites. 1.3 Continuidad de una función en un punto. Continuidad de una función en un intervalo. 1.4 Tipos de discontinuidad. 1.5 Teorema de Bolzano y de Weierstrass.	B3.C1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.	B3.C1.1. Estudia la continuidad de una función y clasifica los puntos de discontinuidad. B3.C1.2. Aplica los conceptos y el cálculo de límites y derivadas, así como los teoremas relacionados, a la resolución de ejercicios y problemas.

### TEORÍA. Definición de función.

	<u>Ejemplo gráfico</u>
--	------------------------

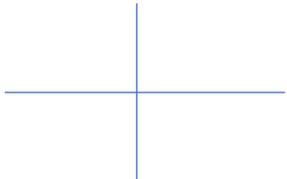
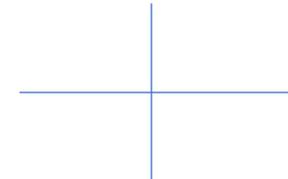
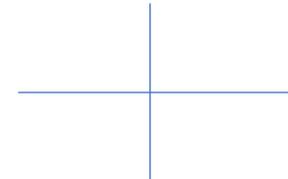
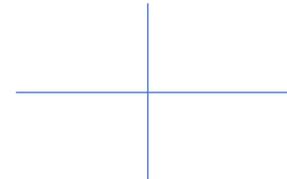
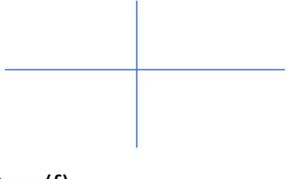
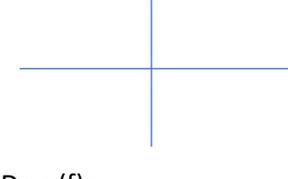
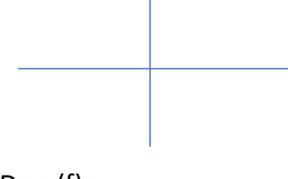
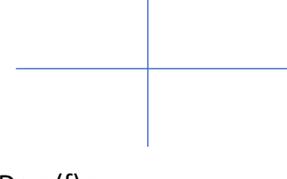
### TEORÍA. Dominio de una función.

--

### TEORÍA. Recorrido de una función.

--

### TEORÍA. Funciones elementales.

Lineales $y=ax+b$  Dom(f)=	Cuadráticas $y=ax^2+bx+c$  Dom(f)=	Polinómicas $y=P(x)$  Dom(f)=	Racionales $y=1/x$  Dom(f)=
Racionales $y=\sqrt{x}$  Dom(f)=	Exponenciales $y=2^x$  Dom(f)=	Logarítmicas $y=\log(x)$  Dom(f)=	Trigonométricas $y=\text{sen}(x)$  Dom(f)=

**TEORÍA.** Dominio de las funciones elementales.

Funciones	Dominios
Polinómicas (P(x)) Exponenciales (2 <sup>x</sup> ) Sen(x), Cos(x)	
Racionales P(x)/Q(x)	
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	
Logarítmicos log <sub>a</sub> (Q(x))	

**Ejercicios:**

1. Encuentra el dominio y el recorrido de las funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3$	b) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$	c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$	d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	e) $f(x) = \ln(x-2)$
---------------------	----------------------------	---------------------------	--------------------------------	----------------------

(Sol.: a) D(f) = R; R(f) = [3, +∞)    b) D(f) = [-1, +∞); R(f) = [2, +∞);

c) D(f) = (-∞, 2) ∪ (2, +∞); R(f) = (-∞, 0) ∪ (0, +∞); d) D(f) = (0, +∞); R(f) = (0, +∞); e) D(f) = (2, +∞); R(f) = R

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$	b) $g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$	c) $h(x) = \ln(x^2-3x+2)$	d) $p(x) = e^{\frac{1}{x}}$
-------------------------------	----------------------------------------	---------------------------	-----------------------------

(Sol.: a) D(f) = R - {-1, 1};    b) D(g) = (-∞, 2) ∪ (2, +∞);    c) D(h) = (-∞, 1) ∪ (2, +∞);    d) D(p) = R - {0}

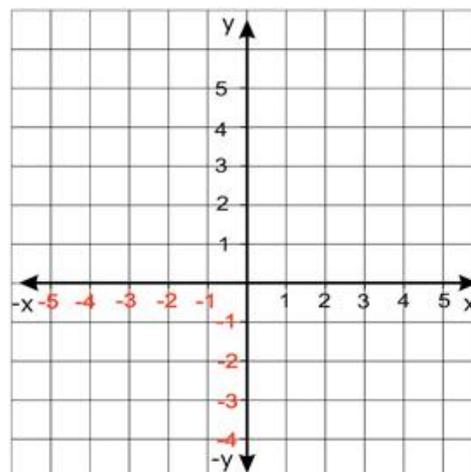
3. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$	b) $g(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$
------------------------------------	----------------------------------------------

**TEORÍA.** Funciones a trozos.

Representa gráficamente:

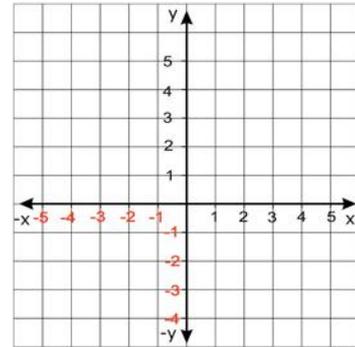
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ 3 & x \geq 2 \end{cases}$$



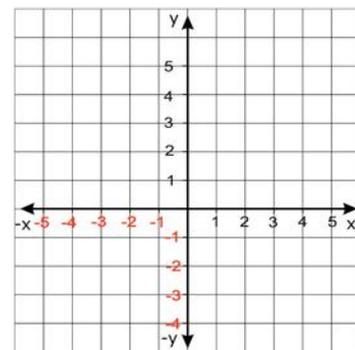
**TEORÍA.** Función valor absoluto.

Expresa como una función a trozos y representa gráficamente:

a)  $f(x) = |x+1|$



b)  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$



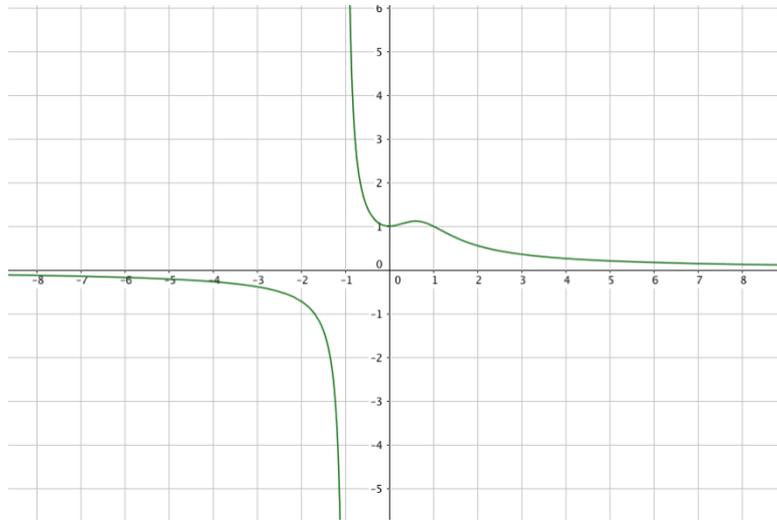
**Ejercicios:**

4. Expresa como una función a trozos la función  $f(x) = \frac{x+2}{|x-5|}$

**TEORÍA.** Idea intuitiva de límite.

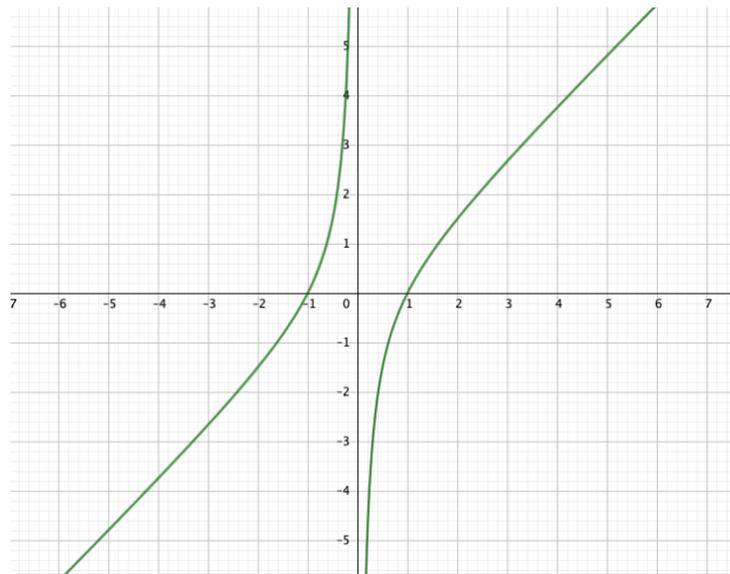
**TEORÍA.** Límites laterales.

5. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



- a)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$       d)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$       e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

6. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$       e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

7. Estudia el dominio y calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que se indican. En el caso de funciones a trozos represéntalas además gráficamente.

a)  $f(x) = (x^3 - 2)$  en  $x = 2$  y  $x = 0$

b)  $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$  en  $x = -1$

c)  $h(x) = (4 - \frac{x^2}{2})$  en  $x = -2$  y  $x = 0$

d)  $p(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  en  $x = 2$

e)  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  en  $x = 1$

(Sol.: a) 6 y -2; b) No tiene; c) 2 y 4; d) 3; e) 2)

### Ejercicios

8. Define la función  $f(x)=|x^2-4|$  y calcula el límite cuando  $x$  tiende a “2” y cuando  $x$  tiende a “-2”.

9. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ ax + 3 & 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & 2 < x \end{cases}$  calcula los valores “a” y “b” para que existan los límites en  $x=1$  y  $x=2$ .

### TEORÍA. Propiedades de los límites.

### Cálculo de límites cuando $x \rightarrow \infty$

**TEORÍA.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , con  $P(x)$  y  $Q(x)$  polinomios.

**TEORÍA.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

**TEORÍA.** Asíntota horizontal. ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ )

**TEORÍA.** Cálculo de límites cuando  $x \rightarrow -\infty$

### Ejercicios

10. Calcula el límite de las siguientes funciones y representa el resultado:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$    c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1$    d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$    e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$    f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$    g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1}$

11. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - x^2$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - x^2$    c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x + 1$    d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 2x + 1$

12. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 3}{-x^2 + 2}$    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x - 1}{6x^2 + 5x}$    c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 3x}{x^3 - 2x + 1}$

13. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3-2x}}{2x+5} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{2x^2+5}}$$

14. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$$

15. Calcula el valor de k de forma que sea cierto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3} = -1$$

16. Determina las asíntotas horizontales de estas funciones y represéntalas gráficamente:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{b) } g(x) = 2^{1/x^2}$$

17. Determina las asíntotas horizontales de estas funciones y represéntalas gráficamente:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \text{b) } g(x) = \frac{-x^2-2}{x^2+1} \quad \text{c) } h(x) = \frac{x^2-(x+1)^2}{2x-3}$$

**TEORÍA.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$  (Indeterminación)

$$\text{Caso 1: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$$

$$\text{Caso 2: } \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x - \ln(x)$$

$$\text{Caso 3: } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2-x} - x$$

### Ejercicios

18. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - e^x$$

19. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 5x}{x + 3} - 2x \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x}{x} - x \right)$

20. Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{1 + 4x}$

**TEORÍA.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a^\infty, 1^\infty$  (Indeterminación)



**Ejercicios**

21. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{x-3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{x} \right)^{x+1}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{2x-3} \right)^{x+2}$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)^{-x+3}$

22. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{x-3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{x} \right)^x$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^x$       d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{2x-1}$       e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-1}{2x} \right)^{4x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-1}{x^3} \right)^{x^3-1}$       g)  $\lim_{x \rightarrow 6} \left( \frac{x^2-4x-10}{x-4} \right)^{1/x-6}$       h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{x+3}{3-x^2} \right)^{-x}$

23. Calcula el valor de "a" (a≠0) para que se verifique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right]^{ax} = e^{-5}$$

24. Determina el valor de "a" para que sea cierta esta igualdad

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$$

### Cálculo de límites cuando $x \rightarrow a$

**TEORÍA.** Asíntota vertical.  $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0})$

25. Calcula el límite de las funciones en los puntos que se indican. Indica cuáles son asíntotas verticales y representa gráficamente los resultados.

a)  $f(x) = \frac{2}{x-2}$  en  $x=2$     b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x=0$     c)  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  en  $x=1$     d)  $h(x) = \frac{4}{x^2-4}$  en  $x=-2$

d)  $p(x) = \frac{1}{x^2}$  en  $x=0$     e)  $f(x) = (x^2-2)$  en  $x=1$     f)  $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 2 \\ 4-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  en  $x=2$     g)  $g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$  en  $x=1$

h)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$  en  $x=-1$  y  $x=0$

**TEORÍA.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$  (Indeterminación)

26. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$     b) (PAU Junio 2008)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$

27. Calcula el valor de "k" para que sea cierta esta igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{kx^2 - k}{x^2 + 3x + 2} = 4$$

28. Calcula por el método que consideres más adecuado:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-2)}{x-2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+1}{5x^2-2} \right)^{\frac{x-1}{2}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+5x} - x$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1}$

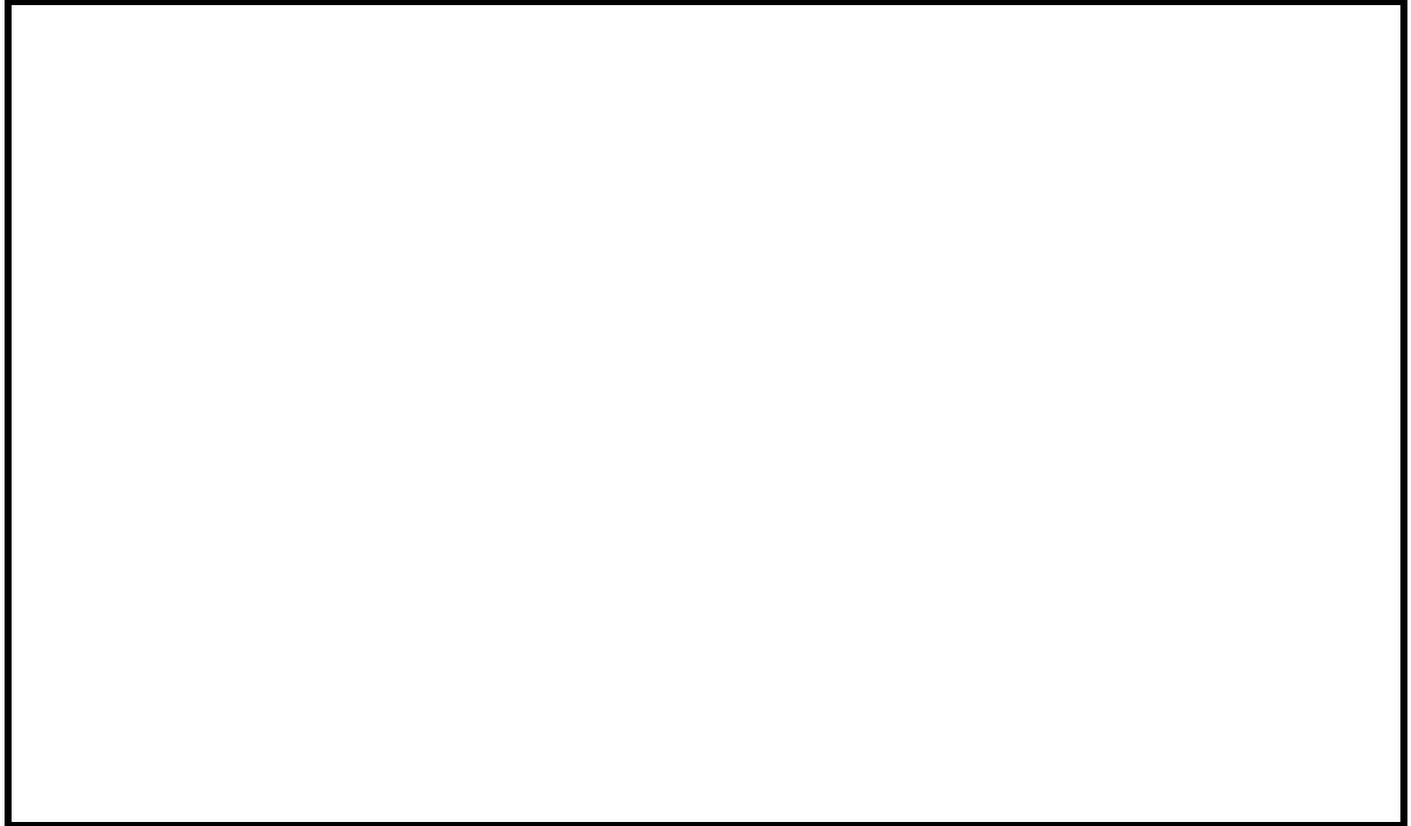
f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{2}}{x^2+x-2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} e^{1/2x-1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)^{1/x}$

## TEORÍA. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.



### Ejercicios

29. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$       b)  $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$       c)  $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$

30. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$       b)  $g(x) = \sqrt{x^2-2x}$       c)  $h(x) = \frac{x^2}{1-x}$

31. Sea  $f(x) = \frac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$ . Determina el valor de "a" para que la recta  $x=-1$  sea una asíntota vertical de  $f(x)$ .

32. Sea  $f(x) = \frac{-20x+4}{ax+10}$ . Determina el valor de "a" para que la recta  $x=2$  sea una asíntota vertical de  $f(x)$ .

Para el valor de "a" obtenido, estudia si tiene una asíntota horizontal.

33. Sea  $f(x) = \frac{4x^2}{wx^2-3}$ . Determina el valor de "w" para que tenga una asíntota horizontal en  $y=12$ .

34. La función  $f(x) = \frac{px^2+1}{x+1}$  tiene como asíntota oblicua la recta  $y=-2x+2$ . Determina el valor de "p" y estudia si la función corta a dicha asíntota oblicua para ese valor de "p".

35. Halla los puntos de corte de la función  $f(x) = \frac{2x^3-4x^2}{2x^2-1}$  con su oblicua.

36. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones: a)  $f(x)=\ln(x-1)$ , b)  $g(x)=e^{x-1}$

**TEORÍA.** Continuidad de una función en un punto.

**TEORÍA.** Continuidad de una función en intervalo  $(a,b)$  y  $[a,b]$ .

**TEORÍA.** Continuidad de funciones elementales

Funciones	Continuidad
Polinómicas $P(x)$	
Racionales $P(x)/Q(x)$	
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	
Exponenciales $(2^x)$	
Sen(x), Cos(x)	
Tag(x)	

## Ejercicios

37. Analiza en  $x = 2$  la continuidad de  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

38. Comprueba si la función  $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$  es continua en  $x = 0$  y  $x = 1$

39. Analiza la continuidad de  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 0$

40. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el punto de abscisa  $x = 0$ :

a)  $f(x) = 2^{-x}$       b)  $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

41. Determinar si la función  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$  es continua en  $x = -2$  y  $x = 2$

42. Define la función  $f(x) = |x-3|$  y estudia si es continua en  $x = -3$  y  $x = 0$

43. Define la función  $g(x) = |x^2 - 1|$  y estudia la continuidad en  $x = -1$  y  $x = 1$

44. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$  en el intervalo  $[-2, 0]$

45. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  en el intervalo  $[-1, 0]$

46. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$     b)  $g(x) = \ln |x|$     c)  $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$     d)  $p(x) = \frac{1}{\tan^2 x - 1}$

47. Calcula  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

48. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  Halla  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

49. Calcula  $a$  y  $b$  para que sea continua la siguiente función

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  Halla  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**TEORÍA.** Tipos de discontinuidades.

Discontinuidad Evitable

Discontinuidad de 1ª especie o salto

Discontinuidad de 2ª especie

**Ejercicios**

50. Estudia la continuidad de  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ . Representa gráficamente la función.

51. Analizar la discontinuidad de las funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

52. La función  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$  no está definida para  $x = 0$ . Define  $f(0)$  de modo que  $f(x)$  sea una función continua en ese punto.

53. Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ . Representa gráficamente la función.

54. Estudia las posibles discontinuidades de las funciones:

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$       c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x} & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

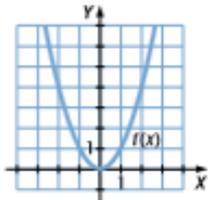
(Sol.: c) En  $x = -1$  discontinuidad evitable, en  $x = 0$  D. de salto infinito y en  $x = 3$  D. de salto finito)

55. Calcular los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función siguiente resulte continua en todos los

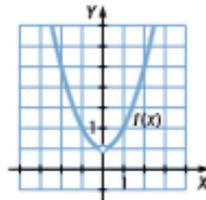
puntos.  $f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{si } x < -1 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -bx^3 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$  (Canarias-Junio 2003). (Sol.:  $a = -2$ ;  $b = \frac{1}{2}$ )

56. Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.

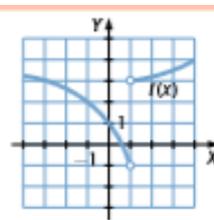
a) En  $x = 0$  y  $x = 2$



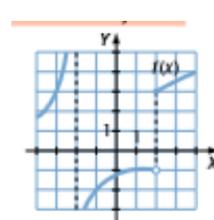
b) En  $x = 0$  y  $x = 2$ .



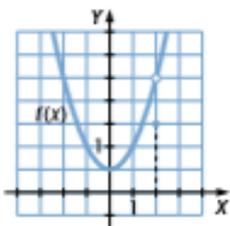
c) En  $x = 1$



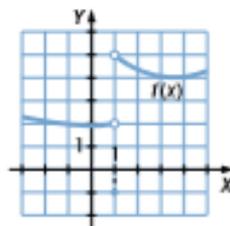
d) En  $x = -2$  y  $x = 2$



e) En  $x = -1$  y  $x = 2$



f) En  $x = 1$



57. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, y especifica los tipos de discontinuidades que presente:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \frac{8}{3-x} & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} 3\ln(x+2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(Sol.: a) Continua en  $\mathbb{R}$ , b)  $x = -1$  discontinua de salto finito)

58. Clasificar las discontinuidades de la siguiente función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**TEORÍA.** Propiedades de las funciones continuas en un punto.



### Ejercicios

59. Estudia la continuidad de las funciones:

a)  $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$     b)  $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$     c)  $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x}$     d)  $p(x) = \text{Ln}(x^2-1)$

60. Determina para qué valores del parámetro “a” son continuas en todo R las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - e & \text{si } x \leq 1 \\ e^{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$     b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2 \\ \text{Ln}(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

61. Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad.

a)  $f(x) = |6 - x^2|$     b)  $g(x) = |x^2 - x - 6|$     c)  $h(x) = |x^2 + x|$

62. Para cualquier valor de a, se considera la función

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } ax & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$  Determina los valores de a para los cuales f(x) es continua en todo R.

63. Estudiar la continuidad y clasifica el tipo de discontinuidad:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x-1}$     b)  $g(x) = \frac{x^2+1}{2x^3+2x^2}$     (Sol.: a) Discontinua de 1ª especie en  $x = -1/2$  y evitables en  $x = -1$ ; b) Discontinua de 1ª especie en  $x = 0$  y  $x = -1$ )

### TEORÍA. Teorema de Bolzano.



**Ejemplo:** Demostrar que la ecuación  $e^{-x} + 2 = x$  tiene al menos una solución real.

**Sol.:** La función  $f(x) = e^{-x} + 2 - x$  es continua en R, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en  $[0,3]$ . Como además  $f(0) = 3 > 0$  y  $f(3) < 0$ , aplicando el Teorema de Bolzano,  $\exists c \in (0,3) : f(c) = 0$ , esto es,  $e^{-c} + 2 - c = 0$  (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

### Ejercicios

64. Verificar si la función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo  $[-1, 1]$

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$     (Sol: No se cumple)

65. Probar que la ecuación  $x^3 - 3x + 40 = 0$  tiene alguna raíz real. Aproxima su valor hasta las décimas.
66. Demuestra que la función  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3}{2x + 1}$  se anula en el intervalo  $[1, 3]$ .
67. Sea  $f(x) = 2 - x + \ln x$  con  $x \in (0, +\infty)$ . Probar que existe un punto  $c \in [\frac{1}{e^2}, 1]$  tal que  $f(c) = 0$
68. Comprobar que  $x^3 + x - 1 = 0$  tiene al menos una solución real en el intervalo  $[0, 1]$
69. Aplica el teorema de Bolzano a la función  $f(x) = x^7 + x + 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$
70. Comprobar que la ecuación  $\sin x + 2x = 1$  tiene alguna solución real.
71. Usando el teorema de Bolzano, demuestra que la ecuación  $x^3 + x - 5 = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(1, 2)$
72. ¿Puedes afirmar que la ecuación  $x - \cos x = 0$  tiene una raíz en el intervalo  $[0, 1]$ ?
73. Demuéstrese que las gráficas de las funciones  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = 1/x$  se cortan en un punto  $x > 0$ . (Castilla y León. Junio 2004.) (Sol.: Existe  $c \in (0, 5; 1)$ , tal que  $h(c) = 0$ .)

74. Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{a}{x} & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$  satisfaga las condiciones

del teorema de Bolzano en el intervalo  $[-3, 3]$ .

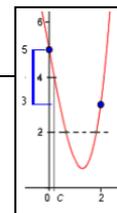
75. Prueba que la ecuación  $x = \cos x$  tiene solución positiva.
76. Demostrar que existe al menos un número real  $x$  tal que  $\sin x = x$ .
77. Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = e^{-x}$  se cortan en un punto.

**TEORÍA.** Propiedad de los valores intermedios (Teorema de Darboux).



**Ejemplo :** Dada la función  $f(x) = x^3 - 5x + 5$ . ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor 4 en algún punto del intervalo  $[0, 2]$ ? ¿Y el valor 2?

(Sol.: Como la función es continua y en los extremos del intervalo toma los valores  $f(0) = 5$  y  $f(2) = 3$ , se deduce que toma todos los valores entre 3 y 5; en particular, el valor 4. Esto es, existirá algún punto  $c \in (0, 2)$  tal que  $f(c) = 4$ . Como 2 no está entre 3 y 5, no puede afirmarse que la función tome ese valor para algún punto del intervalo  $(0, 2)$ ; pero tampoco puede afirmarse que no lo tome. (De hecho, hay dos valores que toman el valor 2).



### Ejercicios

78. Probar que la función  $f(x) = x(\sin x + 1)$  toma el valor 2, en el intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(Sol:  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , por ser el producto de dos funciones continuas.

Como  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 < 2$  y  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 2$ . Por teorema de Darboux, existe un número  $k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , tal que  $f(k) = 2$ .)

79. Dada  $f(x) = 2 \sin x + 5$  ¿toma el valor 6 en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ ?. En caso afirmativo, determina  $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

80. La función  $f(x) = 2 \cos x + 3$ , ¿toma el valor 4 en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ ?

**TEORÍA.** Teorema de los extremos absolutos de Weierstrass.



### Ejercicios

81. Estudiar si están acotadas las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Si es así, hallar sus extremos absolutos: a)  $f(x) = x^2 + 2$  en  $[0, 1]$  b)  $f(x) = \frac{2}{x-2}$  en  $[1, 3]$  (Sol.: No está acotada)

c)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  en  $(0, 1]$  (Sol.: No se puede asegurar que está acotada,  $f(1) = e$  es un mínimo absoluto)

82. Representa gráficamente y comprueba que la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  alcanza los valores

extremos absolutos en el intervalo  $[-1, 4]$

83. Aplica el teorema de Weierstrass a la función  $f(x) = 8 + 2x - x^2$  en el intervalo  $[-1, 4]$ , comprobando si se cumple.



## UNIDAD 2. DERIVADAS.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
2.1 Función derivada. 2.2 Teoremas de Rolle y del valor medio de Lagrange. 2.3 Regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites. 2.4 Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización.	B3.C2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización.	B3.C2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.  B3.C2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.
<u>Otros estándares evaluables:</u>  B3.C1.1. Estudia la continuidad de una función y clasifica los puntos de discontinuidad. B3.C1.2. Aplica los conceptos y el cálculo de límites y derivadas, así como los teoremas relacionados, a la resolución de ejercicios y problemas.		

### TEORÍA: Definición de derivada.

### Ejercicios

1. Utiliza la definición para calcular la función derivada de: a)  $f(x) = 5x - x^2$ , b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , c)  $f(x) = \sqrt{x}$

TEORÍA: Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente y normal a  $f(x)$  en  $x=a$ .

## Ejercicios

2. Consideramos que el espacio recorrido por un móvil en  $t$  horas viene dado por  $e(t) = \begin{cases} 80t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 60t + 60 & \text{si } 3 < t \leq 6 \end{cases}$

a) Calcular la velocidad media a la que el móvil ha viajado entre la 1ª y 5ª hora.

b) Halla la velocidad en el instante  $t = 2$  h. (Solución: a)  $v_m = 70$  km/h; b)  $v_i = 80$  km/h)

3. Averigua en qué punto de la gráfica de  $f(x) = x^2 - 2x$ , la pendiente de la recta tangente es 4. (Sol.: (3, 3))

4. Averiguar en qué punto la tangente a la curva de la función  $f(x) = 1/x$  tiene pendiente  $-4$ , y escribir su ecuación. (Sol.:  $a = \pm \frac{1}{2}$ ;  $y = -4x + 4$ ;  $y = -4x - 4$ )

5. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 5x$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

6. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = 6x^2 + 1$  en  $x = 1$

**TEORÍA:** Tabla para el cálculo de derivadas

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
$f(x) = K$	$f'(x) =$		
$f(x) = x$	$f'(x) =$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) =$	$g(x) = (f(x))^n$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) =$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) =$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) =$	$g(x) = e^{f(x)}$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) =$	$g(x) = a^{f(x)}$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) =$	$g(x) = \ln f(x)$	
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) =$	$g(x) = \log_a f(x)$	
$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{sen } f(x)$	
$f(x) = \text{cos } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{cos } f(x)$	
$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{tg } f(x)$	
$f(x) = \text{arcsen } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{arcsen } f(x)$	
$f(x) = \text{arccos } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{arccos } f(x)$	
$f(x) = \text{arctg } x$	$f'(x) =$	$g(x) = \text{arctg } f(x)$	

**TEORÍA:** Derivada de una suma/resta.

**TEORÍA:** Derivada del producto

**TEORÍA:** Derivada de un número por una función.

**TEORÍA:** Derivada de un cociente.

**TEORÍA:** Regla de la cadena.

### Ejercicios

7. Calcula las funciones derivadas de las funciones:

a)  $f(x) = (x^2 + 3x)^3$     b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$     c)  $f(x) = (\sin x + 1)^2$     d)  $f(x) = x^2 \sin x$     e)  $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 2}$   
 f)  $f(x) = x^2 e^{-x}$     g)  $f(x) = 3x \sqrt{x^2 - 1}$     h)  $f(x) = 2^x \ln(x + 1)$     k)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$     l)  $f(x) = (\tan^2 x + 1) \cos x$

(Sol.: a)  $(6x + 9)(x^2 + 3x)^2$ ; b)  $-2x/(x^2 + 4)^2$ ; c)  $\sin 2x + 2 \cos x$ ; d)  $2x \sin x + x^2 \cos x$ ; e)  $(-3x^2 - 2x - 6)/(x^2 - 2)^2$ ;  
 f)  $e^{-x}(2x - x^2)$ ; g)  $(6x^2 - 3)/\sqrt{x^2 - 1}$ ; h)  $2^x (\ln 2 \ln(x + 1) + 1/(x + 1))$

8. Calcula la función derivada:

a)  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$     b)  $f(x) = \sin x \cos x$     c)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$     d)  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

- e)  $f(x) = \sin^2 x$       f)  $f(x) = \arctan \frac{x}{3}$       g)  $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$       h)  $f(x) = \tan^2 x^2$   
 i)  $f(x) = (\arctan x^2)^2$       j)  $f(x) = \ln \cos e^x$

(Sol.: a)  $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$ ; b)  $f'(x) = \cos 2x$ ; c)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ; d)  $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ ; e)  $f'(x) = \sin 2x$   
 f)  $f'(x) = \frac{3}{9+x^2}$ ; g)  $f'(x) = \frac{1}{2x \ln 2}$ ; h)  $f'(x) = \frac{4x \operatorname{tag} x^2}{\cos^2 x^2}$ ; i)  $f'(x) = \frac{4x \operatorname{arc} \operatorname{tag} x^2}{1+x^4}$ ; j)  $f'(x) = -e^x \operatorname{tag} e^x$ )

9. Calcula la función derivada:

- a)  $f(x) = (\sin x)^x$       b)  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$       c)  $f(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}$       d)  $f(x) = (1+x)^{\ln x}$       e)  $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

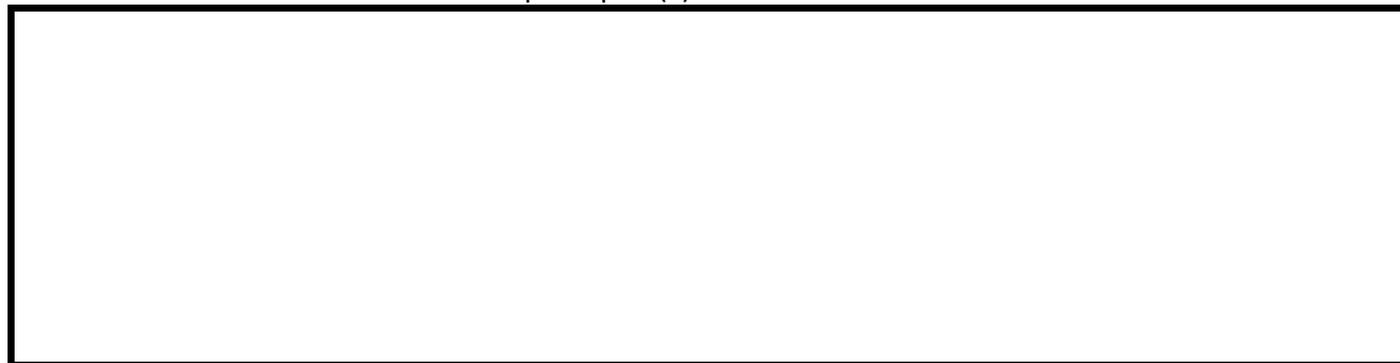
(Sol.: a)  $f'(x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{cotag} x)$ ; b)  $f'(x) = \sqrt[3]{x-2} \left( \frac{-\ln(x-2)}{x^2} + \frac{1}{x^2-2x} \right)$ ;  
 c)  $f'(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}} \left( \frac{x+\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{\sqrt{x}} \right)$ ; d)  $f'(x) = (1+x)^{\ln x} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln x}{1+x} \right]$   
 e)  $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} [\ln(\sin x)^{-\sin x} + \cos^2 x / \sin x]$

10. Calcular, simplificando el resultado, la derivada de la función:  $y = \ln \left( \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)$  (Sol.:  $f'(x) = 2/\sin x$ )

11. **La Rioja. Septiembre 2001** Comprueba que es constante la derivada de la función:

$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$  (Sol.:  $f'(x) = 1/2$ )

**TEORÍA:** Derivadas laterales. Condición para que  $f(x)$  sea derivable.



### Ejercicios

12. Determina, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto que se indica:

a)  $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 2-x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$  en el punto de abscisa  $x = 1$       b)  $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  en  $x = 2$

(Sol.: a)  $f'(1) = -1$ ; b) No es continua en  $x = 2$ , no existe la derivada en dicho punto

13. Calcula, si existe la derivada de la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \geq 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  en  $x = 0$

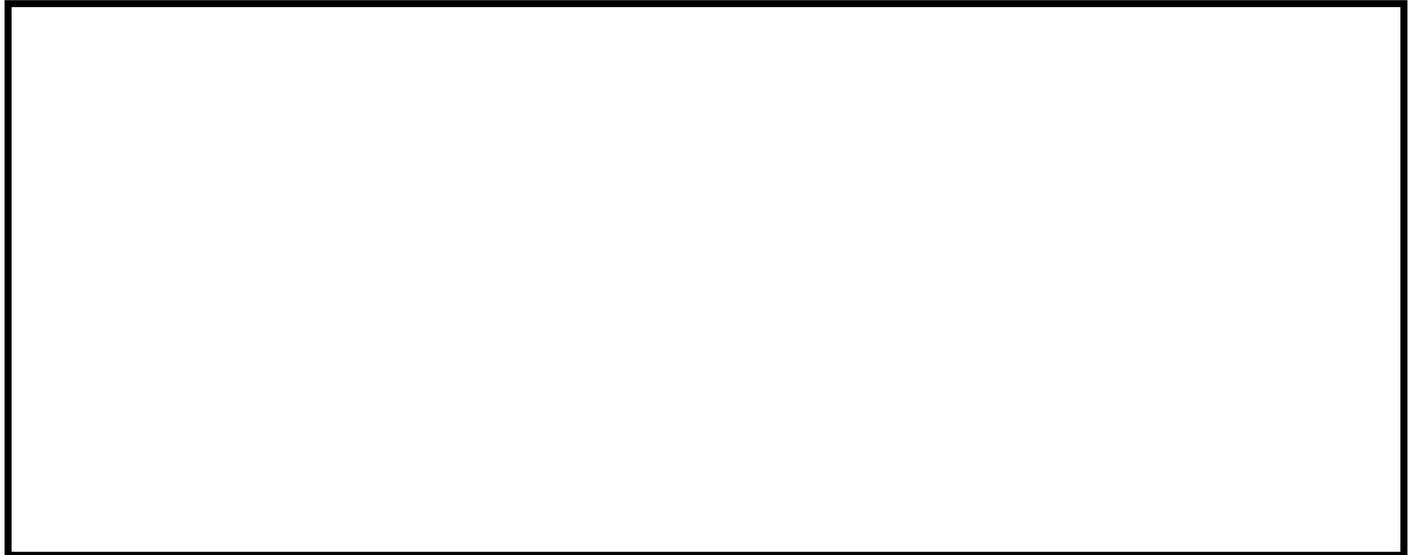
(Sol.: No es derivable en  $x = 0$ . La función tiene un punto anguloso en el punto (0,4))

14. Determina si la función  $f(x) = |x^2 - 1|$  es derivable en los puntos de abscisa  $x = -1$  y  $x = 1$   
(Sol.: No es derivable en  $x = -1$  y  $x = 1$ )

### Ejercicios de recta tangente y recta normal

15. Halla los puntos de la curva  $f(x) = x^2 - 2x + 4$  en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.
16. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , en el punto de abscisa  $x = 1$
17. Halla el punto de la función  $f(x) = \sin x^2$  en que la recta tangente tiene de pendiente  $-2\sqrt{\pi}$  y escribe su ecuación. (Sol.:  $x = \sqrt{\pi}$ ;  $y = -2\sqrt{\pi}x + 2\pi$ )
18. **JUNIO-2003.** Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el punto de abscisa  $x = 0$  a la gráfica de la función  $f$  dada por  $f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$  (Sol.:  $y = 2x$ ;  $y = -\frac{1}{2}x$ )
19. **Reserva SEPT.- 2010** 1A. Dada la función  $f(x) = \arctg(\sqrt{x-1})$ , se pide:  
a) Calcula y simplifica  $f'(x)$   
b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función  $f(x)$  la recta tangente es horizontal.
20. **JUNIO 2011** Calcula los valores de los parámetros  $a$ ;  $b \in \mathbb{R}$  para que la función  $f(x) = (ax^2 + bx)/(x + 1)$  tenga como asíntota oblicua la recta  $y = 2x + 3$ . Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisas  $x = 0$ . (1 punto)
21. ¿En qué punto la recta tangente a  $f(x) = xe^x$  es paralela al eje de abscisa?. Escribe la ecuación de la recta tangente en ese punto. (Sol.:  $(-1, -e^{-1})$ ;  $y = -1/e$ )
22. Averigua los puntos de la gráfica de la función  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ , en que la recta tangente es paralela a la recta  $2x - 3y + 5 = 0$ . (Sol.:  $(1/3, 2/9)$ ,  $(1/9, 22/243)$ )
23. Averigua para que valor de  $x$  la recta tangente a la curva  $y = \ln(x^2 + 1)$  es paralela a la recta  $y = x$ . Escribe la ecuación de esta recta tangente. (Sol.:  $y = x + \ln 2 - 1$ )
24. Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , determina coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que la gráfica de  $f(x)$  pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(3, 0)$ , y que la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 1$  tiene pendiente igual a  $-1$ . (Sol.:  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -2$ ,  $c = 3/2$ )
25. **PAU-Canarias, 2008.** Dada la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , determinar los valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que se cumplan las siguientes condiciones:  
1º Que la tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, 2)$  sea paralela a la recta  $y + 1 = 0$ .  
2º Que la recta  $x - y - 2 = 0$  sea tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisas  $x = 1$ .
26. Dada la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ , halla  $a$  y  $b$  para que las rectas tangentes a la gráfica de  $f(x)$  en los puntos de abscisas  $x = 2$  y  $x = 4$  sean paralelas a  $OX$ . (Sol.:  $a = -9$ ,  $b = 24$ )

**TEORÍA:** Relación de continuidad y derivabilidad.



**Ejercicios**

27. Calcular el valor del parámetro  $a$  para que sea derivable en  $x = 2$  la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } a = 3 \text{ } f(x) \text{ es derivable en } x = 2, \text{ y } f'(2) = -1)$$

28. Determinar si es derivable en  $x = 2$  esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } f(x) \text{ es continua en } x = 2, \text{ pero no es derivable.})$$

29. Determina si la función  $f(x) = |x-1|$  es derivable en los puntos:  $x = 3$  y  $x = 1$ .

30. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x = 2 \quad \text{b) } g(x) = |x+2| \text{ en } x = -2 \text{ y } x = 0$$

31. Demuestra que la siguiente función es continua en el punto  $x = 1$ , pero no es derivable en él:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados?}$$

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

$$32. \text{ Galicia, 2007 Dada la función: } f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ calcula } a \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 2. \text{ Para}$$

el valor obtenido, ¿es  $f$  derivable en  $x = 2$ ? (Sol.:  $f(x)$  continua en  $x = 2$  si  $a = \frac{1}{2}$ ; no es derivable en  $x = 2$ )

33. Calcular el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea derivable en  $x = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos ax & \text{si } x < 0 \\ \ln(e+x)^a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 1 \text{ y } b = 1/e)$$

34. Calcular el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en  $x = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos ax & \text{si } x < 0 \\ \ln(e+x)^a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 1 \text{ y } b=1/e)$$

35. **Extremadura. Junio 2007.** Dada la función  $h(x) = e^{\sin[f(x)]}$ , calcula el valor de su derivada en  $x = 0$ , sabiendo que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ . (Sol.:  $h'(0) = 1$ )

36. **PAU- Madrid, 2005.** Dada la función  $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ , definida para  $x > 1$ , hallar un punto  $(a, f(a))$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en ese punto sea paralela al eje X. (Sol.:  $(2, \ln 4)$ )

37. Calcula a y b para que  $f(x)$  sea continua y derivable en  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 7/2; b = 4)$$

38. Averigua el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en  $x = 1$ :

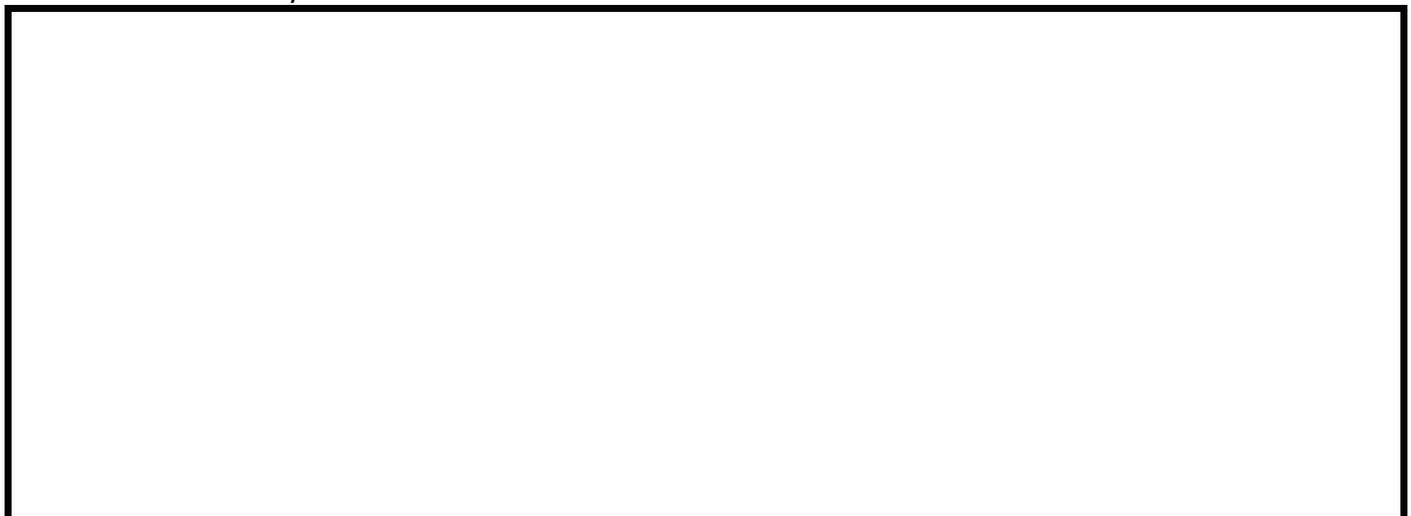
$$39. f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ a \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 1, b = 0)$$

40. Se sabe que la función  $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$  es derivable en el intervalo  $(0, 5)$ . Calcula las constantes a y b. (Sol.:  $a = -7/2, b = 1$ )

41. Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  Estudia la continuidad y la derivabilidad.

42. Determina los valores de a y b para que la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 + \ln(x-1) & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$  sea continua y derivable. (Sol.:  $a = 1$  y  $b = -3$ )

**TEORÍA:** Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.



### Ejercicios

43. Hallar los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ; b)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ ; c)  $f(x) = e^x (x^2 - 3x + 1)$ ; d)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

e)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ; f)  $f(x) = x^2 - \ln x^2$  g)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$

44. Estudia los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a)  $f(x) = x^3 - 3x$  b)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  c)  $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

(Sol.:a) Mínimo relativo en  $x = 1$  y un máximo relativo en  $x = -1$ ; b) estr. decreciente  $(0,1)$  y  $(1, e)$ ; estr. Creciente  $(e, +\infty)$ ; en  $x = e$  tiene un mínimo relativo; c) estric. crec. en  $\mathbb{R}$ , no tiene extremos)

45. Estudiar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función

a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$  b)  $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$

(Sol.: b)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  estr. crec. y  $(-2, 1)$  estr. decr.; en  $x = -2$  tiene un máx. rel. y en  $x = 1$  un mínimo rel.)

46. Halla los extremos relativos de: a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ; b)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ ; c)  $y = \sqrt{x^2 + 4}$ ;

d)  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$  h)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ; e)  $f(x) = e^x (x^2 - 3x + 1)$ ; f)  $g(x) = (2-x)e^x$

(Sol.: c) Máximo relativo: no tiene. Mínimo relativo:  $A(0, 2)$  Creciente :  $(0, +\infty)$  Decreciente:  $(-\infty, 0)$ ; f) Máximo relativo:  $A(1, e)$  Mínimo relativo: no tiene. Creciente:  $(-\infty, 1)$  Decreciente :  $(1, +\infty)$

47. Razona por qué la gráfica de la función  $f(x) = 3x - \sin x$  no puede tener extremos relativos.

48. Dada la función  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$ , calcula  $a$  y  $b$  para que la función tenga dos extremos relativos, uno en  $x = 1$  y otro en  $x = 2$ , respectivamente. Determina si los extremos son máximos o mínimos.

(Sol.:  $a = -9$ ,  $b = 12$ ;  $(1, -1)$  máximo relativo y  $(2, -2)$  mínimo relativo)

49. Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^2 + ax + b$  alcance un mínimo en el punto  $(1,2)$

(Sol.:  $a = -2$ ,  $b = 3$ )

**TEORÍA:** Teorema de Weirstrass para extremos absolutos (visto en tema anterior)

Si  $f(x)$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces alcanza un máximo y un mínimo absoluto en ese intervalo.

Nota: Para calcular los extremos absolutos calculamos los máximos y mínimos relativos ( $f'(x)=0$ ) y los valores  $a$  y  $b$ . Se halla la imagen de los valores obtenidos y la mayor y menor de todas ellas corresponden a los extremos absolutos en  $[a,b]$ .

50. Halla los extremos absolutos de la función  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$  en el intervalo  $[-1, 1]$

(Sol.: mínimo absoluto - 4, en  $x = -1$  y máximo absoluto 1, en  $x = 0$ )

**TEORÍA:** Curvatura. Puntos de inflexión.



**Ejercicios**

51. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente: a)  $f(x) = -x^2 - x + 4$     b)  $g(x) = x^3 - 4x$     c)  $h(x) = \ln(x + 1)$     d)  $p(x) = 2^{x-1}$

52. Estudia la concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$     b)  $g(x) = (x - 3) \cdot e^x$     c)  $h(x) = \ln(x^2 - x)$     d)  $p(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

53. Calcula para  $f(x) = (x + 1) \cdot e^{-x}$  los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los intervalos de concavidad y convexidad.

54. Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones, y a partir de ellos, determina los puntos de inflexión:

a)  $f(x) = x^3 + 3x^2$     b)  $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$     c)  $h(x) = \frac{2 - x^3}{x^2}$     d)  $p(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3}$

55. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones, mediante la derivada tercera:

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 7}$       b)  $g(x) = \frac{x-1}{3x^2}$       c)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

56. Determina los extremos relativos y puntos de inflexión:

a)  $f(x) = x^4 - 4x^3$       b)  $g(x) = x^3 \cdot e^x$       c)  $f(x) = (x^2 + 1) e^x$       d)  $f(x) = x^4 - x^3$

(Sol.: c)  $x = -1$  y  $x = -3$  puntos de inflexión; d) en  $x = 3/4$  máximo relativo y en  $x = 0$  hay un punto de inflexión)

57. Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$       b)  $y = e^x (x - 1)$       c)  $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$       d)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

(Sol.: a) Hay un mínimo en (3, 0) y un máximo en (1, 4); (2, 2) es un punto de inflexión. b) Hay un punto de inflexión en (-1, -2/e); c) Hay un mínimo en (2, -4/3); punto de inflexión en el (0,0) y (4/3, -64/81); d) Hay un máximo en (0, 1). Punto de inflexión  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$  y  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ )

58. Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a)  $y = x^3 - 3x + 4$       b)  $y = x^4 - 6x^2$       c)  $y = x e^x$       d)  $y = \frac{2-x}{x+1}$       e)  $y = \ln(x + 1)$

**TEORÍA:** Teorema de Rolle.



### Ejercicios

59. Discute si es aplicable el Teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se dan. Si es así, ¿para qué valores de c se cumple la tesis?:

$f(x) = \sin x$  en  $[0, 2\pi]$       b)  $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$  en  $[-1, 1]$       c)  $f(x) = x - \sqrt{x}$  en  $[0,1]$

d)  $f(x) = x^4 - 8x^2$  en  $[-1, 1]$       e)  $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  en  $[-4, 4]$

(Sol.: a) Se puede aplicar; b) No se puede; c) Si se puede aplicar; d) Se puede aplicar; c = 0; e) Si se puede aplicar, existe un valor donde se cumple c = 1))

60. Estudia si es aplicable o no el teorema de Rolle a las funciones que se indican. En caso afirmativo halla los puntos del intervalo cuya derivada se anula.

a)  $f(x) = |x^2 - 1|$  en  $[-2, 2]$       b)  $y = \text{sen } x \cdot \cos x$  en  $[0, \frac{\pi}{2}]$

61. Calcula a y b para que la función  $f(x)$  verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, 2]$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 2 & \text{si } x < 1 \\ ax + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 1/2; b = -3/2)$$

62. Comprobar que las ecuaciones siguientes únicamente puede tener una raíz real:

a)  $x^3 + 6x + 4 = 0$       b)  $x^3 + 6x - 1 = 0$

63. Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que las gráficas de las funciones

$f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2^{-x}$ , definidas para  $x > 0$ , se cortan en un solo punto.

64. Calcula m, n y b para que la función  $f(x)$  cumpla el teorema de Rolle en el intervalo  $[-2, b]$ .

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + 5 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

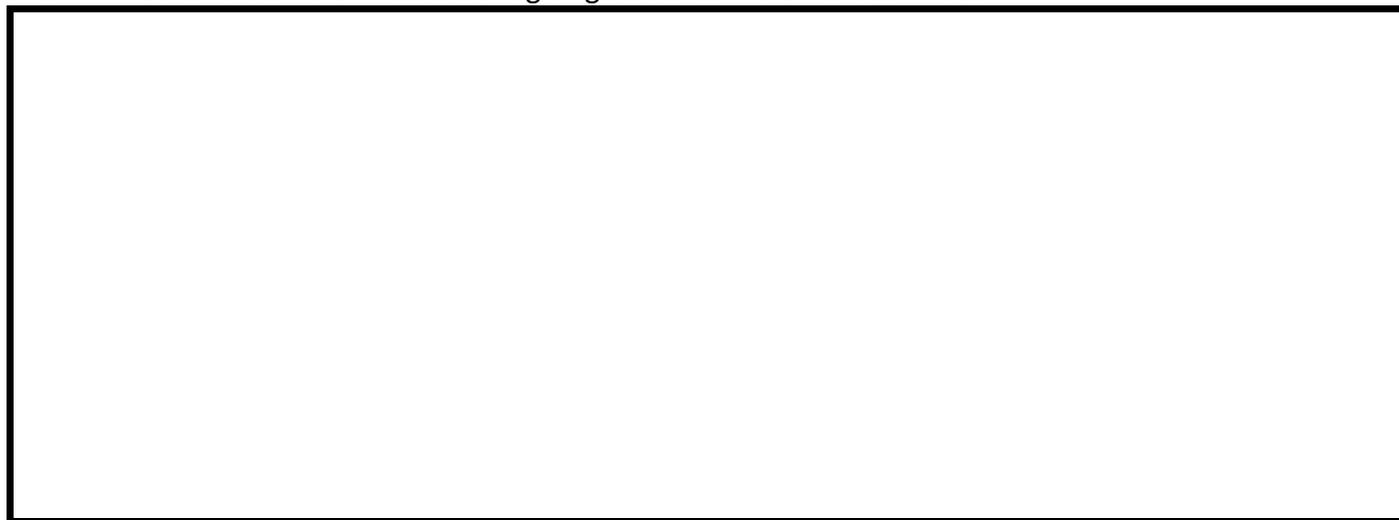
65. Demuestra que la ecuación  $x^5 + 5x + 1 = 0$  tiene solamente una raíz real.

66. Demuestra que la ecuación  $x^4 + 4e^x(x - 1) = 0$  tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?(PAU 1994)

67. Demostrar que las ecuaciones siguientes tienen una única solución:

$x^2 = x \cos x - \text{sen } x$       b)  $x^3 + 6x + 4 = 0$

**TEORÍA:** Teorema del valor medio de Lagrange o de los incrementos finitos.



### Ejercicios

68. Comprueba si la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$  cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo  $[1, 3]$ . En caso afirmativo, determina la derivada que da el teorema y los valores de c correspondientes.

69. Demuestra que existe un punto de abscisa  $x = c \in (1, e)$  tal que la tangente a la gráfica de la función  $f(x) = 2 \ln x + 3$  en  $c$  es paralela a la recta que pasa por  $A(1,3)$  y  $B(e, 5)$ .

70. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , comprueba si cumple el teorema del valor medio en el intervalo  $[-1, 2]$  y, en caso afirmativo, determina el valor cuya existencia garantiza el teorema.

(Sol.: Si,  $c = 2/3$ )

71. Determinar qué valores deben tomar  $a$  y  $b$  para que se le pueda aplicar el teorema del valor medio a la función:  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$  en el intervalo  $[-3, 3]$

72. Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que se pueda aplicar el teorema de Lagrange a la función en el intervalo  $[0,2]$ :  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$  Encuentra el punto, o los puntos, cuya existencia asegura este teorema..

73. (PAU Reserva – Junio- 2004) Considera la función  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[0, 3]$ ?

b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos  $(0, f(0))$ ,  $(3, f(3))$ ?

### TEORÍA: Regla de L'Hopital



### Ejercicios

74. Halla los siguientes límites: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{3 \operatorname{sen} x}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$  c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan g x}{x}$  d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 - 2x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{Ln}(x-2)$  f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4x} - \frac{2}{xe^x} \right)$  h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$  i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)^{1/x}$  j)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$

(Sol.:d) 0; e) 0; h) 1; i) 1; j) 1)

75. Calcula utilizando la regla de L'Hôpital: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$  c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\tan x \cdot \ln x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$  f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{3x^2}$  (Sol.: a)  $\frac{1}{2}$ ; d) 0; e) 1; f) 3)

76. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x^2}$  (Sol.: 0); b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x}$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$  (Sol.:  $\frac{1}{2}$ )

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/e^x}$  (Sol.: 1); f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)$ ; g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tag} x)^{\cos x}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$ ; i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan gx}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}$ ; k)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

77. Determina k para que exista y sea finito:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \operatorname{sen} x}$  (Sol.: k = - 2, límite 2)

78. Calcular el valor de a y b para que el límite se cumpla que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\operatorname{sen} x^2} = 1$  (Sol.: b = 2, a = 3)

79. Reserva PAU (2005) .La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{L(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  es derivable en el

punto  $x = 0$ . ¿Cuánto valen b y c?

80. Calcula a y b para que la función f(x) cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0,4], y calcula el valor o los valores medios dados por el teorema.

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

81. Calcular:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$  c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(\cos x)}$  d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{-x})$  (Sol.: a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $-\frac{1}{2}$ ; c) -1; d)  $\frac{1}{2}$ ; e) 1, f) 0)

**Problemas de optimización conocida la función:**

82. Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante  $f(x) = \frac{300x}{x^3 + 2}$ , siendo  $x$  la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?

83. El consumo de un barco que navega a una velocidad de  $x$  nudos viene dada por

$$C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}. \text{ Calcula la velocidad que es más económica y su consumo.}$$

(Sol.: 23,81 nudos y un consumo de 28,35)

84. La función  $f(t) = \frac{5t}{t^2 - 5t + 9}$  indica el número de afectados, en centenas, por una determinada enfermedad.

a) ¿Cuál fue el día en el que se registró el máximo número de enfermos?

b) ¿A cuántos ascienden estos? (Sol.: a) El tercer día; b) 500 enfermos)

85. Se quiere fabricar latas de refresco cilíndricas de  $500 \text{ cm}^3$ , de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones de la lata, sabiendo que su superficie lateral viene dada por la función

$$S(x, h) = 2\pi x^2 + 2\pi xh. \text{ (Sol.: } x = 4,3 \text{ cm y } h = 8,6 \text{ cm, para que } S \text{ sea mínima)}$$

86. Un producto ha estado 8 años en el mercado. Su precio,  $P(t)$ , en euros, estaba relacionado con el tiempo,  $t$ , en años, que llevaba comercializándose dicho artículo mediante esta función:

$$P(t) = \begin{cases} 24t^2 + 24 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -15t + 150 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función  $P(t)$

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo en el mercado? (Sol.: en  $t=2$  no es derivable; creciente  $(0,2)$ , decreciente  $(2, 8)$ , en  $t=2$  alcanza el precio máximo, que es 120 €)

**Problemas de optimización desconocida la función:**

87. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

88. De todos los triángulos rectángulos de 5 m de hipotenusa, halla el que tiene área máxima.

(Sol.: El triángulo de área máxima es el que tiene  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  m de catetos)

89. Disponemos de una gran extensión de terreno junto a una carretera y queremos cercar parte de su superficie para construir un camping que tenga forma rectangular y que ocupe 10.000 metros cuadrados. La cerca rodearía todo el camping, salvo diez metros junto a la carretera que dejaríamos para la entrada. Si queremos hallar cómo conviene colocar el camping para utilizar la menor cantidad posible de cerca, ¿cuánto metros de valla necesitaríamos?. (Sol.: 390 m.)

90. En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular; uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.
91. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total  $54 \text{ cm}^2$ . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.
92. Un depósito abierto de latón de base cuadrada y capacidad para 4 000 l. ¿qué dimensiones debe tener el depósito para que su fabricación sea lo más económico posible?
93. Entre todos los conos de generatriz 20 cm, averigua el radio de la base y la altura del que tiene volumen máximo. ( $V \text{ cono} = \frac{1}{3} \text{ área base} \times \text{altura}$ ) (Sol.:  $r = 16,33 \text{ cm}$  y  $h = 11,55 \text{ cm}$ )
94. Entre todos los triángulos isósceles cuyo perímetro es 36 cm, calcula el que tiene área máxima.  
( $l = 12 \text{ cm}$ )



## UNIDAD 3. INTEGRAL INDEFINIDA. INTEGRAL DEFINIDA.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
3.1 Primitiva de una función. Propiedades. La integral indefinida. 3.2 Integrales inmediatas. 3.3 Integración por partes y mediante cambio de variable. 3.4 Integrales racionales.	B3.C3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	B3.C3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.
3.5 La integral definida. Propiedades. 3.6 Regla de Barrow. 3.7 Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. 3.8 Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.	B3.C4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.	B3.C4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas. B3.C4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.
<u>Otros estándares evaluables:</u> B3.C1.1. Estudia la continuidad de una función y clasifica los puntos de discontinuidad. B3.C1.2. Aplica los conceptos y el cálculo de límites y derivadas, así como los teoremas relacionados, a la resolución de ejercicios y problemas. B3.C2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. B3.C2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.		

**TEORÍA:** Definición de primitiva e integral de una función. Propiedades.

**Ejercicios:**

1.- Comprobar que  $F(x) = x^3 + 7$  y  $G(x) = x^3 - 3$  son funciones primitivas de  $f(x) = 3x^2$

2.- Recordando las reglas de derivación, calcula las integrales de las siguientes funciones:

a)  $\int \cos x \, dx$     b)  $\int e^{2x} \, dx$     c)  $\int x^2 \, dx$     d)  $\int \frac{1}{x} \, dx$

(Sol.: a)  $I = \text{sen } x + C$ ; b)  $I = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ ; c)  $I = \frac{1}{3} x^3 + C$ ; d)  $I = \text{Ln } |x| + C$ )

**TEORÍA:** Tabla de integrales inmediatas.

Forma sencilla	Forma compuesta
$\int dx =$	$\int k dx =$
$\int x^n dx =$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx =$
$\int \frac{1}{x} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$
$\int e^x dx =$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx =$
$\int a^x dx =$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx =$
$\int \operatorname{sen} x dx =$	$\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx =$
$\int \operatorname{cos} x dx =$	$\int f'(x) \cdot \operatorname{cos} f(x) dx =$
$\int (1 + \operatorname{tag}^2 x) dx =$	$\int [1 + \operatorname{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x) dx =$
$\int -(1 + \operatorname{cotag}^2 x) dx =$	$\int -[1 + \operatorname{cotag}^2 f(x)] \cdot f'(x) dx =$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx =$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx =$	$\int \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2} dx =$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx =$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx =$

### Ejercicios

3.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int 3x^5 dx$ ; b)  $\int \frac{1}{x^3} dx$ ; c)  $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx$ ; d)  $\int 4 \cdot 3^x dx$ ; e)  $\int \frac{3x}{x^2+5} dx$

f)  $\int x \cos(x^2+1) dx$ ; g)  $\int \frac{5}{1+(2x)^2} dx$ ; h)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ ; i)  $\int \cot g x dx$ ; j)  $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx$ ;

k)  $\int (2^x + 3^x) dx$ ; l)  $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$ ; n)  $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ ; ñ)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ; o)  $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ ; p)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ ;

q)  $\int \operatorname{sen} e^{2x} \cdot e^{2x} dx$ ; r)  $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$ ; s)  $\int \frac{x dx}{x^2-1}$ ; t)  $\int \frac{dx}{9+x^2}$ ; x)  $\int \frac{3 dx}{(x-3)^4}$

(Sol.: a)  $I = \frac{1}{2} x^6 + k$ , b)  $I = \frac{-1}{2x^2} + k$ , c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} \sqrt[6]{x} + k$ ; d)  $I = \frac{3^x}{\operatorname{Ln} x} + k$ ; e)  $I = \frac{3}{2} \operatorname{Ln}(x^2+5) + k$

f)  $I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2+1) + k$ ; g)  $I = \frac{5}{2} \operatorname{arctg}(2x) + k$ ; h)  $I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + k$ , i)  $I = \operatorname{Ln} |\operatorname{sen} x| + k$ ;

j)  $I = \sqrt[3]{x} + \frac{2}{9} \sqrt{5x^3} + C$ ; k)  $I = \frac{2^x}{\operatorname{Ln} 2} + \frac{3^x}{\operatorname{Ln} 3} + C$ ; l)  $I = 1/3 \operatorname{arc} \operatorname{tang}(x^3) + C$ ; n)  $I = \frac{1}{2} \sqrt[4]{(1-x^2)^5} + C$ ;

ñ)  $I = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C$ ; o)  $I = 1/3 \operatorname{arc} \operatorname{tang}(3x) + C$ ; p)  $I = \operatorname{sen}(\operatorname{Ln} x) + C$ ; q)  $I = \frac{1}{2} \cos e^{2x} + C$ ; r)  $I = 1/\operatorname{sen}^2 x + C$

s)  $I = 1/\operatorname{Ln} |x^2-1| + C$ ; t)  $I = 1/3 \operatorname{arc} \operatorname{tang}(x/3) + C$ ; x)  $I = -(x-3)^{-3}$

4.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a)  $\int (x^2+4x)(x^2-1) dx$ ; b)  $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ ; c)  $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx$ ; d)  $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$ ; e)  $\int \frac{dx}{4+x^2}$ ; f)  $\int \frac{2dx}{1+9x^2}$ ; g)  $\int \frac{5dx}{3x^2+1}$ ;

h)  $\int \frac{dx}{3+x^2}$ ; i)  $\int \frac{1}{x} \operatorname{Ln}^3 x dx$ ; j)  $\int \frac{x}{(x^2+3)^5} dx$ ; k)  $\int \frac{(1+\operatorname{Ln} x)^2}{x} dx$ ; l)  $\int \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x dx$ ;

m)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ ; n)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ ; ñ)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$ ; o)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$ ; p)  $\int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx$

(Sol.: a)  $I = 1/5 x^5 + x^4 - 1/3 x^3 - 2x^2 + C$ ; b)  $I = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + C$ ; c)  $I = \operatorname{Ln} |x| + \frac{1}{\sqrt{x}} + C$ ; d)  $I = -\frac{1}{2(x-4)^2} + C$ ;

e)  $I = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang}(x/2) + C$ ; f)  $I = 2/3 \operatorname{arc} \operatorname{tang}(3x) + C$ ; g)  $I = \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} g(\sqrt{3x}) + C$ ;

h)  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctan} g(x/\sqrt{3}) + C$ ; i)  $I = \frac{1}{4} \operatorname{Ln}^4 x + C$ ; j)  $I = -\frac{1}{8(x^2+3)^4} + C$ ; k)  $I = 1/3 (1+\operatorname{Ln} x)^3 + C$ ;

l)  $I = \frac{3}{4} (1+\cos x)^{4/3}$ ; m)  $I = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x/3) + C$ ; n)  $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen} \sqrt{2} x + C$ ; ñ)  $I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \sqrt{2} x + C$ ;

o)  $I = 1/3 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^3) + C$ ; p)  $I = \operatorname{Ln} |x-1| + C$

**TEORÍA:** Método de sustitución.

Ejemplo:  $\int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$

**Ejercicios**

5.- Calcular:

a)  $\int \sin^4 x \cos x dx$  ( $t = \sin x$ )    b)  $\int e^{3x+1} dx$  ( $t = 3x+1$ )    c)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$  ( $t = x^2$ )  
d)  $\int \tan x dx$  ( $t = \cos x$ )

(Sol.: a)  $I = \frac{1}{5} \sin^5 x + k$ ; b)  $I = \frac{1}{3} e^{3x+1} + k$ ; c)  $I = \frac{1}{2} \arctag x^2 + k$ ; d)  $I = -\ln |\cos x| + k$ )

6.- Calcula: a.-  $\int x e^{x^2} dx$     b.-  $\int x \cos x^2 dx$     c.-  $\int \frac{5x}{x^4+1} dx$     d.-  $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;

e.-  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$  (cambio  $x = t^{m.c.m.(2,3)}$ )    f.-  $\int 2^{\sin x} \cos x dx$ ;    g.-  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} dx$  (cambio  $t = \sqrt{x-1}$ ) ;

h)  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

(Sol.: a)  $I = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$ ; b)  $I = \frac{1}{2} \sin x^2 + k$ ; c)  $I = \frac{2}{5} \arctag x^2 + k$ ; d)  $I = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + k$ ;

f)  $I = \frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + k$ ; g)  $I = \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \ln |\sqrt{x-1}| + k$ ; h)  $I = \arctan(e^x) + k$ )

7.- Calcula las siguientes primitivas:

a)  $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$     b)  $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1} dx$     c)  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

(Sol.: a)  $-(1+\sqrt{x})^2 + 6(1+\sqrt{x}) - 4\ln|1+\sqrt{x}| + k$     b)  $I = x - \frac{1}{2} \ln|e^{2x}+1| + \arctan(e^x) + k$

c)  $I = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + k$  )

**TEORÍA:** Método de integración por partes



**Ejercicios**

8.- Calcula

$$\int x \cdot e^x dx \quad \text{b) } \int x^3 \ln x dx \quad \text{c) } \int \ln(x+1) dx$$

$$\text{(Sol.: a) } I = e^x(x-1) + k; \text{ b) } I = \frac{x^4}{4} \ln|x| - \frac{x^4}{16} + k; \text{ c) } I = (x+1) \ln|x+1| + k$$

9.- Calcula:

$$\text{a.- } \int \text{arc tag } x dx \quad \text{b.- } \int \text{sen}(\ln x) dx \quad \text{c.- } \int x \text{sen } x dx \quad \text{d.- } \int x^2 \cos x dx; \text{ e.- } \int e^{-x} \text{sen } x dx$$

$$\text{f.- } \int x \cdot 2^{-x} dx \quad \text{g.- } \int x^2 e^{-x} dx \quad \text{h.- } \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{(Sol.: a) } I = x \text{ arc tang } x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + k; \text{ b) } I = \frac{x}{2} (\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$$

$$\text{c) } I = -x \cos x + \text{sen } x + k; \text{ d) } I = (x^2 - 2) \text{sen } x + 2x \cos x + k; \text{ e) } I = -\frac{1}{2} e^{-x} (\text{sen } x + \cos x) + k$$

$$\text{f) } I = -2^{-x} \left( \frac{x}{\ln 2} + \left( \frac{1}{\ln 2} \right)^2 \right) + k; \text{ g) } I = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + k; \text{ h) } I = (\ln x)(\ln(\ln x)) - \ln x + k$$

10.- Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int x \ln x dx; \quad \text{b) } \int e^x \cos x dx; \text{ c) } \int x^2 \text{sen } x dx; \text{ d) } \int \cos(\ln x) dx; \text{ e) } \int \text{arctag } x dx$$

$$\text{f) } \int (x+1)^2 e^x dx; \text{ g) } \int \frac{x}{e^x} dx; \text{ h) } \int \text{arc cos } x dx; \text{ i) } \int x \cdot 2^{-x} dx; \text{ j) } \int x^2 \cos 2x dx$$

$$\text{(Sol.: a) } I = \frac{x^2}{2} \ln|x| + \frac{1}{4} x^2 + C; \text{ b) } I = \frac{1}{2} [e^x \text{sen } x + e^x \cos x] + C; \text{ c) } I = -x^2 \cos x + 2 [x \text{sen } x + \cos x] + C;$$

**TEORÍA:** Integración de funciones racionales.

### Ejercicios

11.- Calcula: a.-  $\int \frac{x^2 - x + 3}{x} dx$  b.-  $\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1} dx$  c.-  $\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2} dx$

(S: a)  $I = \frac{x^2}{2} - x + 3\text{Ln}|x| + k$ , b)  $I = \frac{3x^2}{2} - 2x - 5\text{Ln}|x - 1| + k$ , c)  $I = \frac{3x^2}{2} - 5x + \text{Ln}|x + 2| + k$

12.- Expresa las siguientes integrales de la forma  $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$  y resuélvelas:

a)  $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} dx$ ; b)  $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1} dx$ ; c)  $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2} dx$

13.- Calcula:

a.-  $\int \frac{5x + 2}{x^2 + x} dx$ ; b)  $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1} dx$ ; c)  $\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2} dx$  d)  $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 10x + 7}{x^3 - 7x - 6} dx$ ; e)  $\int \frac{x - 2}{x^2 + x} dx$ ;  
f)  $\int \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx$ ; g)  $\int \frac{2x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$ ; h.-  $\int \frac{5x - 8}{x^2 - 3x + 2} dx$ ; i)  $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$ ; j)  $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - 3x + 2} dx$   
k)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$

(Sol.: a)  $I = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} + k$ ; b)  $I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\text{Ln}|x - 1| - 5\text{Ln}|x + 1| + k$ ; c)  $I = 3\text{Ln}|x + 2| + 5\text{Ln}|x - 1| + k$ ; i) a)  $I = \frac{-4}{3}\text{Ln}|x + 2| + \frac{4}{3}\text{Ln}|x - 1| + k$ ; j)  $I = \frac{x^2}{2} + x + \text{Ln}|x - 2| + \text{Ln}|x - 1| + k$ ; k)  $I = x + \text{Ln}|x| - 2\text{Ln}|x + 1| + k$ )

14.- Calcula:

a)  $\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9} dx$ ; b)  $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$ ; c)  $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1} dx$

(Sol.: a)  $I = 5\text{Ln}|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$ ; b)  $I = \text{Ln}|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + k$ ; c)  $I = \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2} + k$ )

15.- Calcula:

a)  $\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9} dx$ ; b)  $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$ ; c)  $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1} dx$ ; d)  $\int \frac{5x - 3}{x^3 - x} dx$

(Sol.: a)  $I = 5\text{Ln}|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$ ; b)  $I = \text{Ln}|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + k$ ; c)  $I = \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2} + k$ ; d) b)  $I = \text{Ln}|x - 1| - \frac{5}{2(x - 1)^2} + k$ )

16.- Calcula:

a)  $\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$  b)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$  c)  $\int \frac{x + 5}{x^2 + 1} dx$

(Sol.: a)  $I = \frac{1}{2}\text{Ln}|x^2 + 1| + 2\text{arctag } x + k$ ; b)  $I = \frac{1}{2}\text{arctag}\left(\frac{x}{2}\right) + k$ ; c)  $I = \frac{1}{2}\text{Ln}|x^2 + 1| + 5\text{arctag } x + k$ ;

17.- Calcula

a)  $\int \frac{3x^2 - 7x + 4}{x - 3} dx$     b)  $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4} dx$     c)  $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx$

d)  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$  (Sol.:  $x - 2\arctan x + C$ )    e)  $\int \frac{2x^4}{(x-1)^3} dx$     f)  $\int \frac{3x^3 - 2}{(x-2)^2} dx$

g)  $\int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$  (Sol.:  $x^2 + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| + k$ )

h)  $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$  (Sol.: 1)  $I = \frac{3x^2}{2} + 2x + 10\ln|x-3| + k$ ; 2)  $I = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\ln|x-4| + k$ ;) )

**TEORÍA:** Integral definida de una función continua.

**TEORÍA:** Propiedades

**TEORÍA:** Regla de Barrow



**Ejercicios**

18.- Calcular: a)  $\int_{-1}^2 (5 - x^2) dx$ ; b)  $\int_0^{\pi/4} \text{sen } x \, dx$ ; c)  $\int_e^{2e} \frac{1}{x} dx$ ; d)  $\int_0^3 (x - 2)^2 dx$

e)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ ; f)  $\int_0^1 x e^x dx$ ; g)  $\int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$  h)  $\int_1^e \text{Ln } x \, dx$  i)  $\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

19.- Calcula  $\int_{-2}^5 f(x) dx$ , siendo  $f(x)$  la función  $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

20.- Determina las siguientes integrales definidas:

a)  $\int_{-4}^2 |x^2 - 4| dx$     b)  $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$     c)  $\int_{-3}^3 |x+2| dx$

21.- Calcula  $\int_{-1}^3 |f(x)| dx$  si  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

22.- Calcula:

a)  $\int_0^5 x^2 e^x dx$     b)  $\int_2^3 \frac{x}{(1-x)^2} dx$     c)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2 x \cos x \, dx$     (Sol.: a)  $17 e^5 - 2$ ; b)  $\ln 2 + \frac{1}{2}$ ; c)  $2/3$ )

**TEORÍA:** Teorema del valor medio del Cálculo Integral.



### Ejercicios:

23. Aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral a la función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0,2]$ . Realizar la representación gráfica. (Sol.:  $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ )

24.- Hallar el valor promedio de  $f(x) = 3x^2 - 2x$  en el intervalo  $[1, 4]$ . (Sol.: 16)

25.- Hallar el valor medio de la función  $f(x) = 2x^2 + 1$  en el intervalo  $[1, 3]$  y averigua en que valor se alcanza. (Sol.:  $29/3$ ;  $c = 2,08$ )

26.- ¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo integral a la siguiente función en el intervalo  $[0, 1]$ ?

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{En caso afirmativo, comprobar su verificación. (Sol.: } c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{)}$$

### TEORÍA: Teorema Fundamental del Cálculo Integral.



### Ejercicios

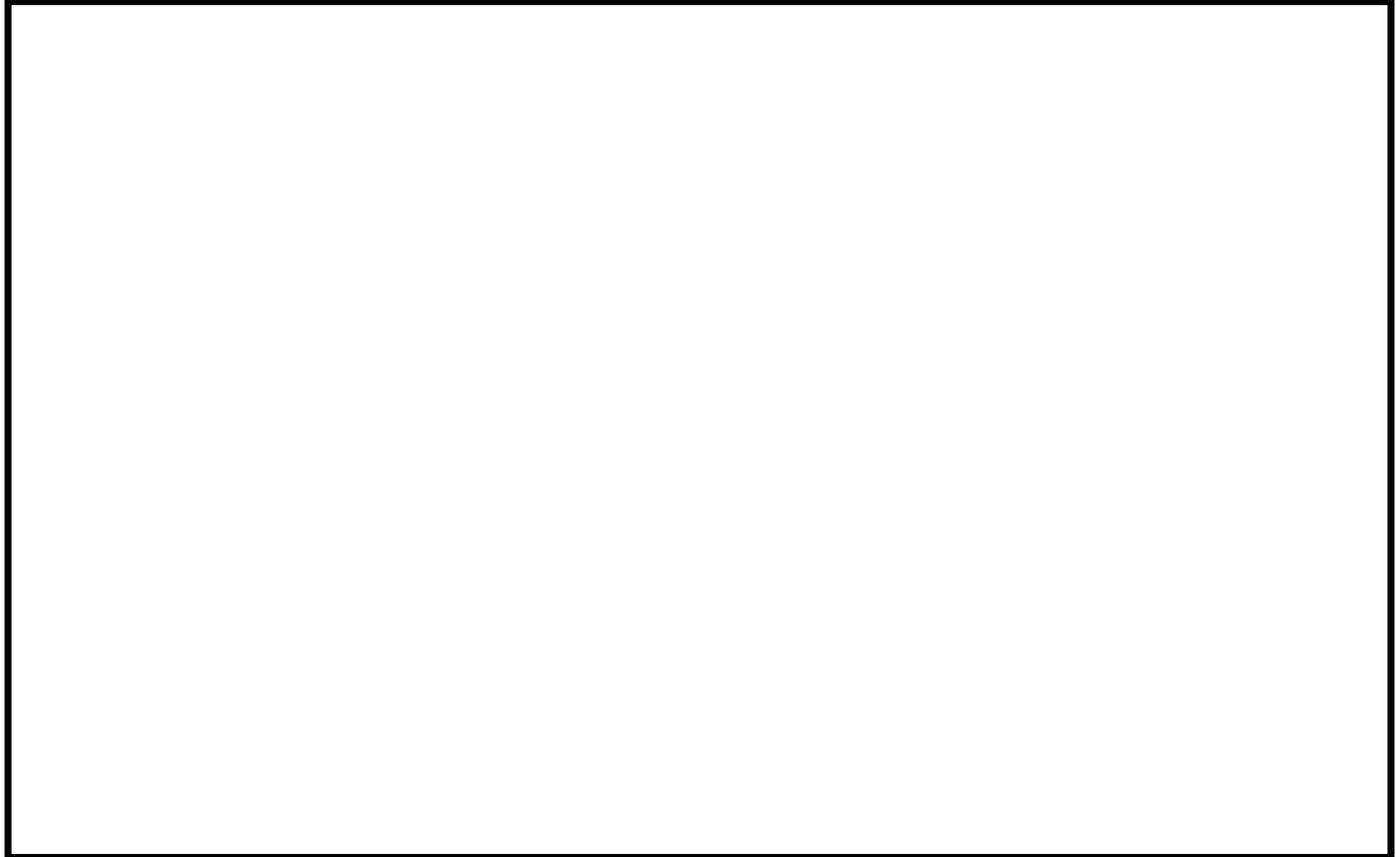
27.-\_ Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$G(x) = \int_0^x (t^2 - 1) dt \quad H(x) = \int_0^{\cos x} (t^2 - 1) dt$$

$$\text{(Sol.: } H'(x) = (\cos^2 x - 1) (-\sin x) = \sin^3 x \text{)}$$

28.- Halla la derivada de las siguiente función:  $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t} dt$  (Sol.:  $F'(x) = 2/x$ )

**TEORÍA:** Cálculo del área bajo una curva.



**Ejercicios**

- 29.- Calcula el área de la región limitada por la función  $f(x) = x^2 - 1$  las rectas  $x = 0$ ,  $x = 2$  y el eje X. (Sol.: 2 u de superficie)
- 30.- Hallar el área comprendida entre la curva  $f(x) = x^3 - x$ , el eje X y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$  (Sol.:  $5/2 u^2$ )
- 31.- Halla el área de la región del plano encerrada por la curva  $y = \ln x$  entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa  $x = e$ . (Sol.:  $1 u^2$ )
- 32.- calcula el área entre la curva  $y = x^3 - 5x^2 + 6x$  y el eje X. (Sol.:  $37/12 u^2$ )
- 33.- Averigua área comprendida entre la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , el eje X y las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$

**TEORÍA:** Cálculo del área entre 2 curvas.



**Ejercicios**

- 34.- Dada la función  $y = x^2 + 1$ . Halla el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes a la curva en los puntos de abscisas  $x = 1$  y  $x = -1$ . (Sol.:  $2/3 u^2$ )
- 35.- Halla el área que delimitan las gráficas de las funciones  $f(x) = x^2 + 2x$  y  $g(x) = x + 2$ . (Sol.:  $A = 4,5 u^2$ )
- 36.- Calcular el área delimitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ . (Sol.:  $A = 0,5 u^2$ )
- 37.- Calcula el valor del coeficiente  $b$  sabiendo que el área delimitada por la parábola  $y = x^2 + bx - 2$  y la recta  $2x + y + 2 = 0$ , es  $4/3 u^2$ . (Sol.:  $b = 0$  y  $b = -4$ )
- 38.- Averigua el área delimitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \cos x$ , en el intervalo  $[0, 2\pi]$  (Sol.:  $4\sqrt{2} u^2$ )
- 39.- Hallar el área comprendida entre las curvas de las funciones  $y = x^4 - x + 1$  y  $y = x^4 - x^3 + 1$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 2$ . (Sol.:  $5/2 u^2$ )
- 40.- Calcular el área de la región limitada por las funciones  $f(x) = 5x^3 - 4x$  y  $g(x) = x$ . (Sol.:  $5/2 u^2$ )
- 41.- Hallar área limitada por las parábolas  $y = \frac{x^2}{2}$  e  $y^2 = 2x$ . Representa el recinto cuya área se pide. (Sol.:  $4/3$ )
- 42.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola  $y = x^2 - 1$ , la recta  $y = 5 - x$  y el eje  $OX$ . (Sol.:  $35/6 u^2$ )
- 43.- Calcula el área del recinto plano limitado por las rectas  $y = x$ ,  $y = 2x$  y la parábola  $y = x^2$ . (Sol.:  $7/6 u^2$ )
- 44.- Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = x$ ,  $y = 8x$ , y halla su área.
- 45.- Dada la curva  $y = x^2 + 2x + 2$ , halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

## UNIDAD 4. Matrices. Determinantes.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
<p>4.1. Operaciones Matrices. Tipos matrices y operaciones. Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.</p> <p>4.2 Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.</p>	<p>B2.C1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos.</p>	<p>B2.C1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales.</p> <p>B2.C1.2. Opera con matrices y aplica las propiedades de las operaciones, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos.</p>
<p>4.3 Determinantes hasta orden 4. Propiedades elementales.</p> <p>4.4 Rango de una matriz.</p> <p>4.5 Matriz inversa y cálculo por el método más adecuado.</p> <p>4.6 Ecuaciones matriciales.</p>	<p>B2.C2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.</p>	<p>B2.C2.1. Calcula determinantes hasta orden 4.</p> <p>B2.C2.2. Determina el rango de una matriz aplicando el método de Gauss o determinantes.</p> <p>B2.C2.3. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.</p> <p>B2.C2.4. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.</p>
<p><u>Otros estándares evaluables:</u> Límites y continuidad (B3.C1.1, B3.C1.2), Derivadas (B3.C2.1., B3.C2.2), Integrales(B3.C3.1, B3.C4.1, B3.C4.2)</p>		

### TEORÍA: Definición de matriz.

### TEORÍA: Tipos de matrices.

Matriz cuadrada:

Matriz identidad o unidad:

Matriz fila:

Matriz columna:

Matriz nula:

Matriz traspuesta de A:

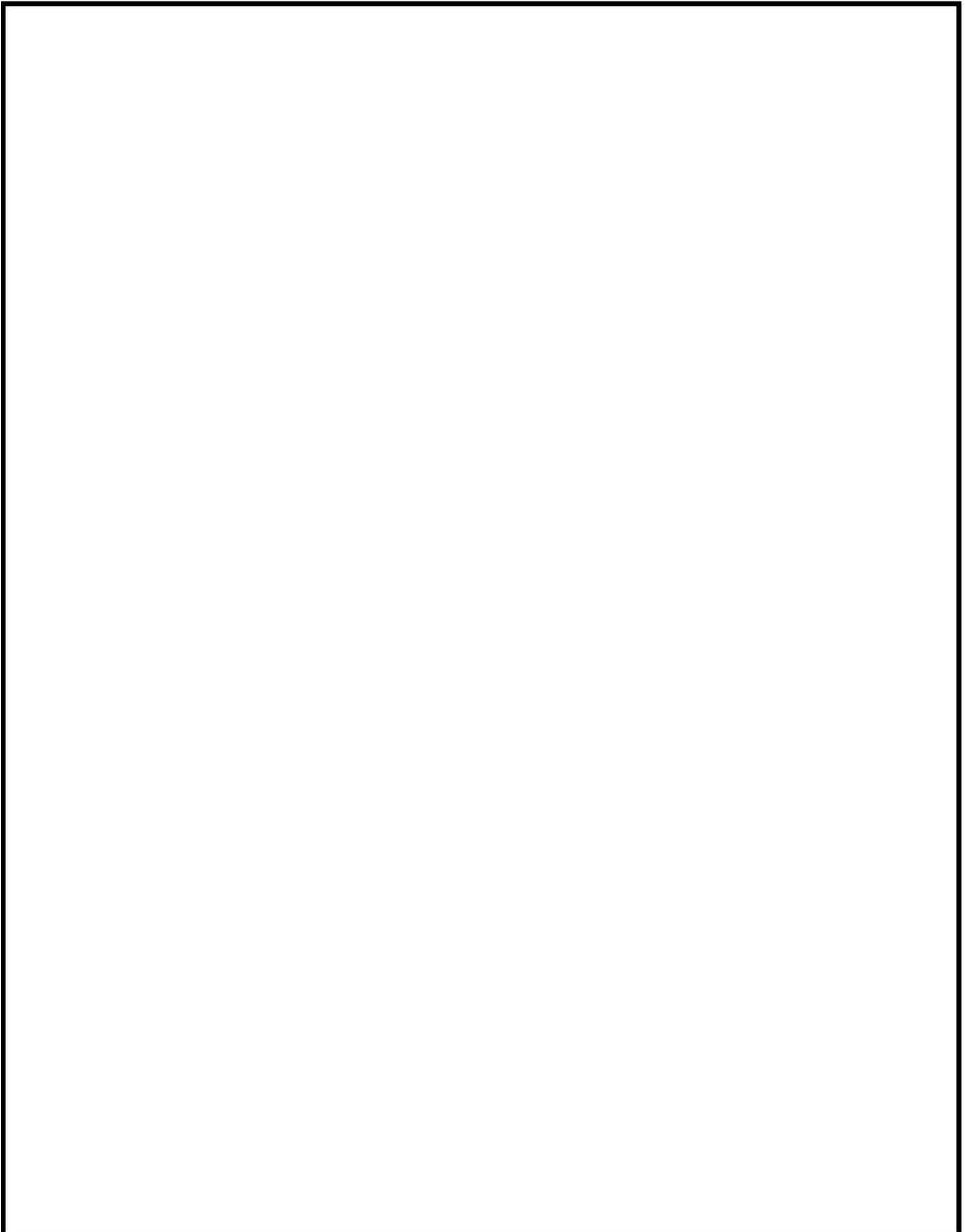
Matriz simétrica:

Matriz antisimétrica:

Matriz diagonal:

Matriz triangular superior (inferior):

**TEORÍA:** Operaciones con matrices.



## Ejercicios

1.- Efectúa la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 5 & -5 & -6 \end{pmatrix})$$

2.- Calcula las matrices A y B que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

3.- Efectúa las siguientes operaciones:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix})$$

4.- Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Sol.: } A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \\ D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix})$$

5.- Calcula  $A^2$ ,  $A^3$  y  $A^4$  y obtén una fórmula general para  $A^n$ :

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$       b)  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

6.- Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Halla  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^5$ . Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A,

es decir, de  $A^n$ , para cualquier número natural n.

7.- Calcula X tal que  $X - B^2 = A \cdot B$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$        $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix})$$

**TEORÍA:** Matriz traspuesta. Propiedades.

**TEORÍA:** Rango de una matriz. Método de Gauss.

**Ejercicios**

8.- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comprobar que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

9.- Siendo A y B matrices cuadradas, demostrar que:

a)  $A + A^t$  es simétrica.    b)  $A \cdot A^t$  es simétrica    c) Si A es simétrica, entonces  $B^t \cdot A \cdot B$  es simétrica.

10.- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  comprueba que:

a)  $(A + B)^t = A^t + B^t$     b)  $(3A)^t = 3A^t$

11.- Un industrial produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos. A, B y C. La producción semanal de tornillos es:

Planos: 2000 A 2500 B 3000 C Estrella: 2500 A 3500 B 4000 C

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo A es de un 5%, del tipo B es de un 4% y del tipo C es de un 2%. Expresa la matriz de la producción semanal de tornillos y calcula el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

(Sol.: Tornillos planos no defectuosos: 7 240 Tornillos de estrella no defectuosos: 9 655)

12.- En un instituto A hay 43 chicas y 40 chicos en 3º de la E.S.O. y en 4º de la E.S.O. hay 41 chicas y 50 chicos, mientras que en otro instituto B, en 3º de la E.S.O. hay 130 chicas y 90 chicos, y en 4º de la E.S.O. hay 70 chicas y 80 chicos. Ordena estos datos en forma de matrices y calcula el número de chicas y chicos por curso en los dos institutos juntos.

**TEORÍA:** Rango de una matriz por método de Gauss.

13.- Determinar el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } r(A) = 2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix}$$

(Sol.:  $r(A)=2$ ;  $r(B) = 2$ ;  $r(C) = 3$ ;  $r(D) = 2$ )

### TEORÍA: Determinantes.

### Ejercicios

14.- Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$       (Sol.:  $|A| = 13$ ;  $|B| = 0$ )

15.- Analiza para qué valores de “a” son regulares las matrices:

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & a \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} a-1 & -3 \\ -a-1 & a+1 \end{pmatrix}$       (Sol.: a)  $a \neq 4$ ; b)  $a \neq -1, 4$ )

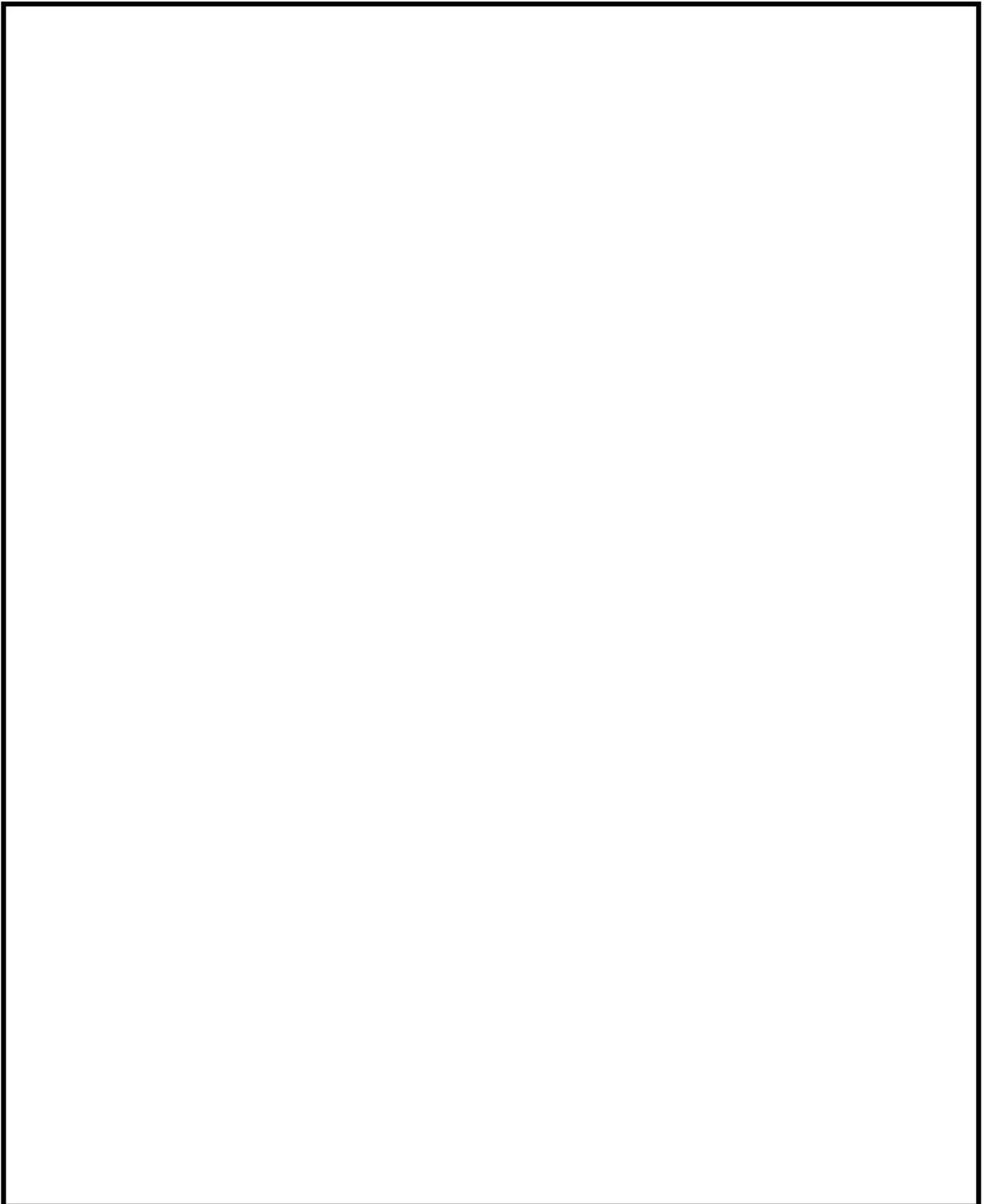
16.- Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$       c)  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$  (Sol.: a) 18 ; b) -24; c) 28)

17.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$       b)  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47$       (Sol.: a)  $x = 6$ ; b)  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ )

### TEORÍA: Propiedades de los determinantes.



## Ejercicios

18.- Se sabe que  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$

- a) Calcula el valor de  $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$     b) Enuncia una de las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

(Sol.: a) 60; b) Un determinante se puede descomponer en la suma de otros dos de forma que tenga todas las líneas iguales menos una, cuya suma sea la del primero. Se ha aplicado 3 veces.

- Para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Por tanto, en una línea se pueden sacar los factores comunes.
- Si en la matriz se cambian dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.
- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.)

19.- Sabiendo que el determinante  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ , calcula:

a)  $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$     b)  $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$     c)  $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$     d)  $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

20.- Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$     a)  $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$     b)  $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$     c)  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

(Sol.: a) 3; b) 1; c) 1)

21.- Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$ , determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes

a)  $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$     b)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$     c)  $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

(Sol.: a) 4; b) 6; c) 12/5)

**TEORÍA:** Matriz inversa.

**TEORÍA:** Propiedades de la matriz inversa.

**Ejercicios:**

**22.-**  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres matrices cuadradas tales que  $|A| = 5$ ,  $|B| = 4$  y  $|C| = 2$ . Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.

- a)  $|A^t|$     b)  $|B^{-1}|$     c)  $|A B^{-1}|$     d)  $|A B^{-1}|$     e)  $| (B C)^{-1} |$     f)  $| C^{-1} B^t |$

**(Sol.: a)**  $|A^t| = |A| = 5$  ; b)  $|B^{-1}| = 1/|B| = 1/4$  ; c)  $|A B^{-1}| = |A| \cdot 1/|B| = 5/4$  ; d)  $4/5$ ; e)  $1/8$ ; f)  $2$ )

**23.-** Dadas la matrices  $A$  y  $B$  de orden  $4 \times 4$  con  $|A| = 3$  y  $|B| = 2$ , calcula  $|A^{-1}|$ ,  $|B^t A|$  y  $| (AB^{-1})^t |$ . Justifica las respuestas. **(Sol.:  $1/3$ ;  $6$ ;  $3/2$ ; .  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ ,  $|A^t| = |A|$ )**

**TEORÍA:** Formas de calcular la matriz inversa.

## Ejercicios

24.- Hallar la matriz inversa de las siguientes:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Sol.: a) } A^{-1} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad b) B^{-1} = -1/4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix}; \quad c) C^{-1} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad d) D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix})$$

25.- Consideramos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro  $a$  la matriz no tiene inversa?

b) Calcula la matriz inversa cuando  $a = 2$ . (Sol.: a)  $a = 0$  o  $a = 1$ ; b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ )

26.- Consideramos la matriz  $A: A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (Sol.: a)  $x \neq 0$ ; b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ )

¿Para qué valores de  $x$  tendrá inversa la matriz? b) Hállala para  $x = 2$

27.- Determina el valor de  $a$  para que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$  no tenga inversa. Calcula  $A^{-1}$  para los restantes valores de  $a$ .

28.- Halla los valores del parámetro  $t$  para los cuales las matrices  $A$  y  $B$  no son regulares y calcula: a)

$$A^{-1} \text{ si } t = 1 \quad b) B^{-1} \text{ si } t = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

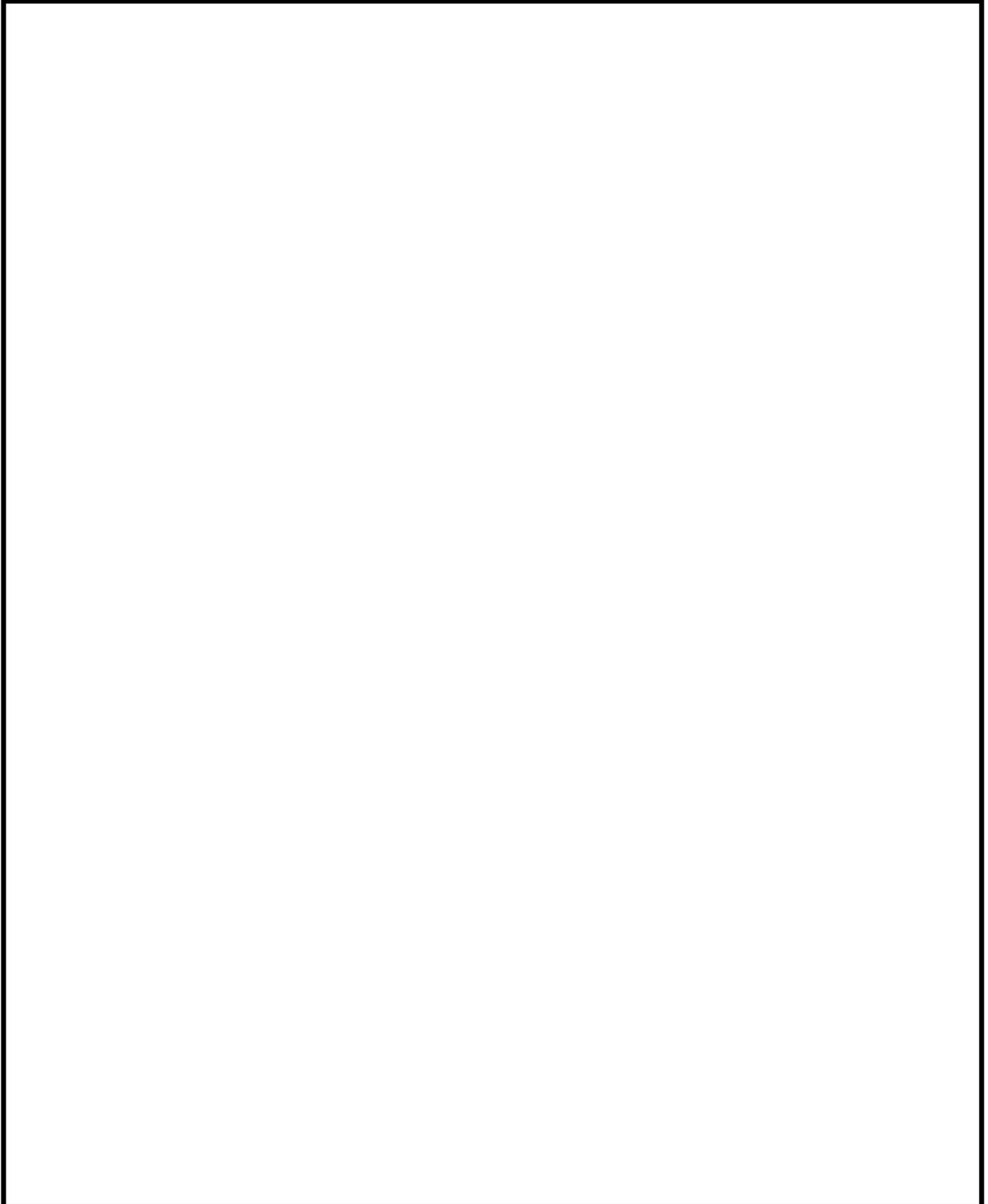
$$(\text{Sol.: } t = 2 \text{ y } t = -6; a) A^{-1} = -1/7 \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix})$$

29.- Considera la matriz  $A$  que depende de un parámetro  $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a) \text{ ¿Para qué valores de } a \text{ tiene } A \text{ inversa? Justifica la respuesta}$$

b) Para  $a = 0$  halla la inversa de  $A$ . (Sol.: a) Tiene inversa para  $a \neq 1$ ; b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ )

**TEORÍA:** Cálculo de determinantes usando los adjuntos.



### Ejercicios

30.- Calcula los determinantes siguientes:

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

(Sol.: a) -2030; b) 0; c) -28; d) 83; e) -24; f) 0)

31.- Calcula:

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \quad (\text{Sol.: a) -72; b) 0; c) -18})$$

32.- Resuelve las ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad c) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \quad d) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0
 \end{array}$$

(Sol: a) 1, -3; b) 2, 3, 1; c) 1, -1; d) 0, -2)

33.- ¿Para qué valores de a se anula este determinante?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

**TEORÍA:** Rango de una matriz por determinantes

### Ejercicios

34.- Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Sol.: 3, 3, 4, 2)

35.- Calcular el rango de las siguientes matrices según los valores de a:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(Sol.: a)  $a = 2$   $r(A) = 2$ ;  $a \neq 2$   $r(A) = 3$ ; b)  $a = 0$ ,  $a = 1/2$   $r(B) = 2$ ;  $a \neq 0, 1/2$   $r(B) = 3$ ; c)  $a = 2$   $r(C) = 3$ ;  $a \neq 2$   $r(C) = 4$ )

36.- Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$$

(Sol.: a)  $t = 0, 1$   $r(A) = 3$ ;  $t = 2$   $r(A) = 2$ ;  $t \neq 0, 1, 2$   $r(A) = 3$ ; b)  $t = 0, 1, 2$   $r(B) = 2$ ;  $t \neq 0, 1, 2$   $r(B) = 3$ )

37.- Calcula el rango, según los valores de m,

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Sol.: a) Si  $m = -2 \rightarrow$  Rango (A) = 2, Si  $m = 3 \rightarrow$  Rango (A) = 2, Si  $m \neq -2$  y  $m \neq 3 \rightarrow$  Rango (A) = 3)

38.- Calcula el rango de la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{según los valores del parámetro a. (Sol.: } a = 2 \text{ } r(M) = 3; a \neq 2 \text{ } r(M) = 4)$$

39.- Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix} \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Sol.: c) si  $m = 1$   $r(M) = 2$ ; si  $m \neq 1$   $r(M) = 3$ )

**TEORÍA:** Ecuaciones matriciales.



**Ejercicios**

40.- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$  halla la matriz X que verifica  $(AB^t + C)X = D$  (Sol.:  $X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$ )

41.- Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:

a)  $A^{-1}XA = B$       b)  $(A + X)B = I$       siendo  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Sol.: a)  $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$  ; b)  $X = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$  )

42.- Halla X tal que  $3AX = B$ , siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$       (Sol.:  $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ )

43.- (PAU – Madrid Sep-2007) Calcular una matriz cuadrada X que verifica  $XA^2 + BA = A^2$ , siendo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$       (Sol.:  $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ )

44.- Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$  (Sol.: a)  $m = 0$   $r(A) = 1$ ;  $m \neq 0$   $r(A) = 3$ ; b)  $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ )

a) Estudia, según los valores de m, el rango de A.

b) Para  $m = -1$ , calcula la matriz X que verifica  $XA + A - 2I$ , siendo I la matriz unidad de orden 3

45.- Halla una matriz  $X$  que cumple la condición:

$$X \cdot B + B = B^{-1}, \text{ siendo } B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{S: } X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix})$$

(Castilla-La Mancha, 1996)

46.- Encuentra una matriz  $X$  que verifique  $A \cdot X + B = C$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{S: } X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix})$$

47.- Halla la matriz  $X$  que satisface la ecuación:  $A X B + C = D$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

48.- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , resuelve matricialmente la ecuación:

$$A \cdot X - C \cdot X = 2 C$$

49.- **(P.A.U.)** Resuelve las ecuaciones matriciales siguientes:

a)  $AX - B + C = 0$ , siendo:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $XA - 2B + 3C = D$ , siendo:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

50.- Calcular una matriz cuadrada  $X$  sabiendo que verifica  $X A^2 + B A = A^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix})$$

51.- Determina la matriz  $X$  que verifica la ecuación  $AX = X - B$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix})$$



## UNIDAD 5. SISTEMAS DE ECUACIONES.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
5.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial. Teorema de Rouché-Fröbenius. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.	B2.C2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	B2.C2.5. Plantea un sistema de ecuaciones lineales a partir de un enunciado, lo clasifica, lo resuelve e interpreta las soluciones.
<p><u>Otros estándares evaluables:</u>            Límites y continuidad (B3.C1.1, B3.C1.2), Derivadas (B3.C2.1., B3.C2.2), Integrales(B3.C3.1, B3.C4.1, B3.C4.2)            Determinantes. Matrices (B2.C1.1. , B2.C1.2., B2.C2.1. , B2.C2.2., B2.C2.3., B2.C2.4.)</p>		

**TEORÍA:** Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.

**TEORÍA:** Tipos de sistemas según su solución

**TEORÍA:** Métodos para resolver un sistema.

## Ejercicios

1.- Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

2.- Clasifica y resuelve, si es posible, por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

(Sol.: a) C.D. *Solución:*  $x = 1, y = -2, z = 3$ ; b) S.I. ; c) C. I, *Soluciones:*  $x = -3 + 2t, y = t, z = -2 + t$ )

3.- Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

(Sol.: a)  $(3, -2, 0)$ ; b)  $(-t/2, -t/2, t)$ ; c)  $(-1 - 3t, 2 + 4t, t)$ ; d)  $(-1, 1, -2)$ )

4.- Expresa en forma matricial y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

5.- Resuelve por el método matricial el siguiente sistema:  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$  S:  $(1, 2, -1)$

6.- Resuelve por el método matricial:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

(Sol.: a)  $(3/2, -1/2, 0)$ ; b)  $(1, 1, -1)$ )

7.- Analiza si los siguientes sistemas de ecuaciones son de Cramer y, en su caso, resuélvelos:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 5z = 13 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \quad (\text{S: } (4, 1, 2)) \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -3 \end{cases} \quad (\text{S: } (1, 2, 2)) \quad \text{c) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{S: } (1/2, 1/2, 0))$$

8.- Resuelve por el método de Cramer, si es posible:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

(Sol.: a)  $(3/2, -1/2, 0)$ ; b)  $(1, 1, -1)$ )

**TEORÍA:** Teorema de Rouché- Frobenius.

**TEORÍA:** Discusión de un sistema en función de un valor  $k$ .

### Ejercicios

9.- Discute en función del parámetro  $m$  el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } m \neq -8, \text{ solución trivial; si } m = -8, \text{ S.C. Indeterminado})$$

10.- Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de  $m$  que lo hacen compatible:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

(Sol.: a) Si  $m = 7$  Sistema compatible determinado.; Si  $m \neq 7$  Sistema incompatible. Solución: (1, 1)  
Si  $m = -1$  Sistema compatible indeterminado.  $(1 - k, -1 - 7k, 3k)$   
Si  $m \neq -1$  Sistema incompatible.)

11.- Estudia el sistema dependiente del parámetro a,  $\begin{cases} x+y+z = a+1 \\ x+y+(a-1)z = a \\ x+ay+z = 1 \end{cases}$ . Resuélvelo, aplicando la regla de Cramer, en el caso  $a = 0$ .

(S:  $a \neq 1$  y  $a \neq 2$   $r(A) = 3$  y  $r(A^*) = 3$ . El sistema es C. Deter.

$a = 1$  y  $a = 2$   $r(A) = 2$  y  $r(A^*) = 3$ . El sistema es Incomp.

Para  $a = 0$ , sistema de Cramer y la solución es  $(1/2, 0, 1/2)$ )

12.- Discute y resuelve los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} ax+y+z = 4 \\ x-ay+z = 1 \\ x+y+z = a+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y-2z = 0 \\ \text{b) } x+y+z = 5 \\ 4x-5y+az = -10 \end{cases}$$

(Sol: a)  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$ ,  $r(A) = r(A^*) = 3$  y el sistema C. Deter.

$a = 1$   $r(A) = 2$  y  $r(A^*) = 3$  y el sistema Incomp.

$a = -1$   $r(A) = 2 = r(A^*)$  y el sistema C. Indeter.  $(-3/2, 5/2 - t, t)$

b)  $a \neq -3/8$  C. Deter.  $a = -3/8$  C. Indeter.)

13.- Discute el sistema siguiente, según los valores de a, y resuelve en su caso:

$$\begin{cases} ax+y+z = 0 \\ (a+1)x+y-az = 0 \\ x+(a+1)y = 0 \end{cases}$$

(Sol.:  $a \neq 0$  y  $a \neq -1$  C. Deter.  $(0, 0, 0)$ ;  $a = 0$  C. Indeter.  $(t, -t, t)$ ;  $a = -1$  C. Indeter.  $(0, -t, t)$ )



## UNIDAD 6. Vectores. Puntos, rectas y planos en el espacio.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
<p>6.1 Espacios vectoriales. Sistemas de vectores linealmente independientes y generadores. Bases de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector respecto de una base.</p> <p>6.2 Espacio vectorial euclídeo. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.</p>	B4.C1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.	<p>B4.C1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.</p> <p>B4.C1.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y sus propiedades.</p>
<p>6.3 Ecuaciones de la recta</p> <p>6.4 Ecuaciones del plano</p> <p>6.5 Posiciones relativas de planos y rectas</p>	B4.C2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio. OBJ. b),j),k)	<p>B4.C2.1. Expresa la ecuación de la recta en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas de rectas en el espacio afín.</p> <p>B4.C2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.</p> <p>B4.C2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio</p> <p>B4.C2.4 Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.</p>
<p><u>Otros estándares evaluables:</u></p> <p>Límites y continuidad (B3.C1.1, B3.C1.2), Derivadas (B3.C2.1., B3.C2.2), Integrales(B3.C3.1, B3.C4.1, B3.C4.2)</p> <p>Determinantes. Matrices (B2.C1.1. , B2.C1.2., B2.C2.1. , B2.C2.2., B2.C2.3., B2.C2.4.) , Sistemas (B2.C2.5)</p>		

### TEORÍA: Vector en el espacio.

**TEORÍA:** Vectores L. Dependientes / L. Independientes.

**TEORÍA:** Base

### Ejercicios

- 1.- Sea la base  $\mathbf{B} = \vec{u} (1,0,1); \vec{v} (1,1,0); \vec{w} (0,1,1)$ . Expresa el vector  $\vec{p} (-1, -4, 1)$  como combinación lineal de los vectores de la base B, es decir las componentes del vector  $\vec{p}$  respecto a dicha base. (Sol.:  $k_1 = 2, k_2 = -3, k_3 = -1$ , y las componente del vector  $\vec{p}$  respecto la base B es  $(2, -3, -1)$ )
- 2.- Comprobar si los conjuntos de vectores siguientes son l.i. o l.d. :
  - a)  $(2, 1, 3), (-3, -1, 2)$  y  $(0, 1, -1)$
  - b)  $(0, 0, -1), (-2, -1, 0)$  y  $(-3, 0, 1)$  (Sol.:  $r = 3$ , por lo tanto son l.i. )
- 3.- Determina el número máximo de vectores linealmente independientes entre los siguientes, y elige vectores que los sean:  $(1, 2, 3), (0, 1, -2), (1, 3, 0), (0, 2, -4)$  (Sol.: Calcula el rango, tres vectores )

- 4.- Hallar el valor del parámetro “a” para que los vectores  $(-2, 1, a)$ ,  $(3, 2, -1)$  y  $(1, 0, -a)$  sean linealmente dependientes. (Sol.:  $a = 1/5$ )
- 5.- Determina el valor de “a” para que los puntos estén alineados:  
a)  $A(1, a, 2)$ ,  $B(3, 0, 1)$  y  $C(0, -2, a)$ .  
b)  $A(1, -4, -1)$ ,  $B(-3, 0, -1)$  y  $C(a, -2, a)$   
(Sol.: Comprobar si los dos vectores pueden ser proporcionales, a) no están alineados, b)  $a = -1$ )
- 6.- Determinar el valor de “a” para que los puntos  $A(-a, 0, 4)$ ,  $B(1, -3, 5)$ ,  $C(3, 2, 0)$  y  $D(0, -7, 8)$  sean coplanarios  
(Sol.: Los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  deben ser l.d.;  $a = -1$ )
- 7.- Comprobar si los puntos  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(1, -2, 4)$  y  $C(1, -3, 5)$  están alineados. (Sol: No)
- 8.- Averigua los valores de m y n para que  $P(4, -1, 3)$ ,  $Q(3, 5, 1)$  y  $R(0, m, n)$  estén alineados. (Sol.:  $m = 23$  y  $n = -5$ )
- 9.- Demostrar que los vectores  $\vec{u}(1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}(0, 2, 0)$  y  $\vec{w}(0, 1, -3)$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$ . Hallar las componentes del vector  $\vec{p}(4, -1, 2)$  en esta base. (Sol.: a) Son l.ind. b)  $(4, -1/6, -2/3)$ )

### TEORÍA: Producto escalar



### Ejercicios

10.- Dados los vectores  $\vec{u}(3, -4, 12)$  y  $\vec{v}(5, -2, -6)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$       b)  $\left| \vec{u} \right|$  y  $\left| \vec{v} \right|$       c) el ángulo  $(\vec{u}, \vec{v})$

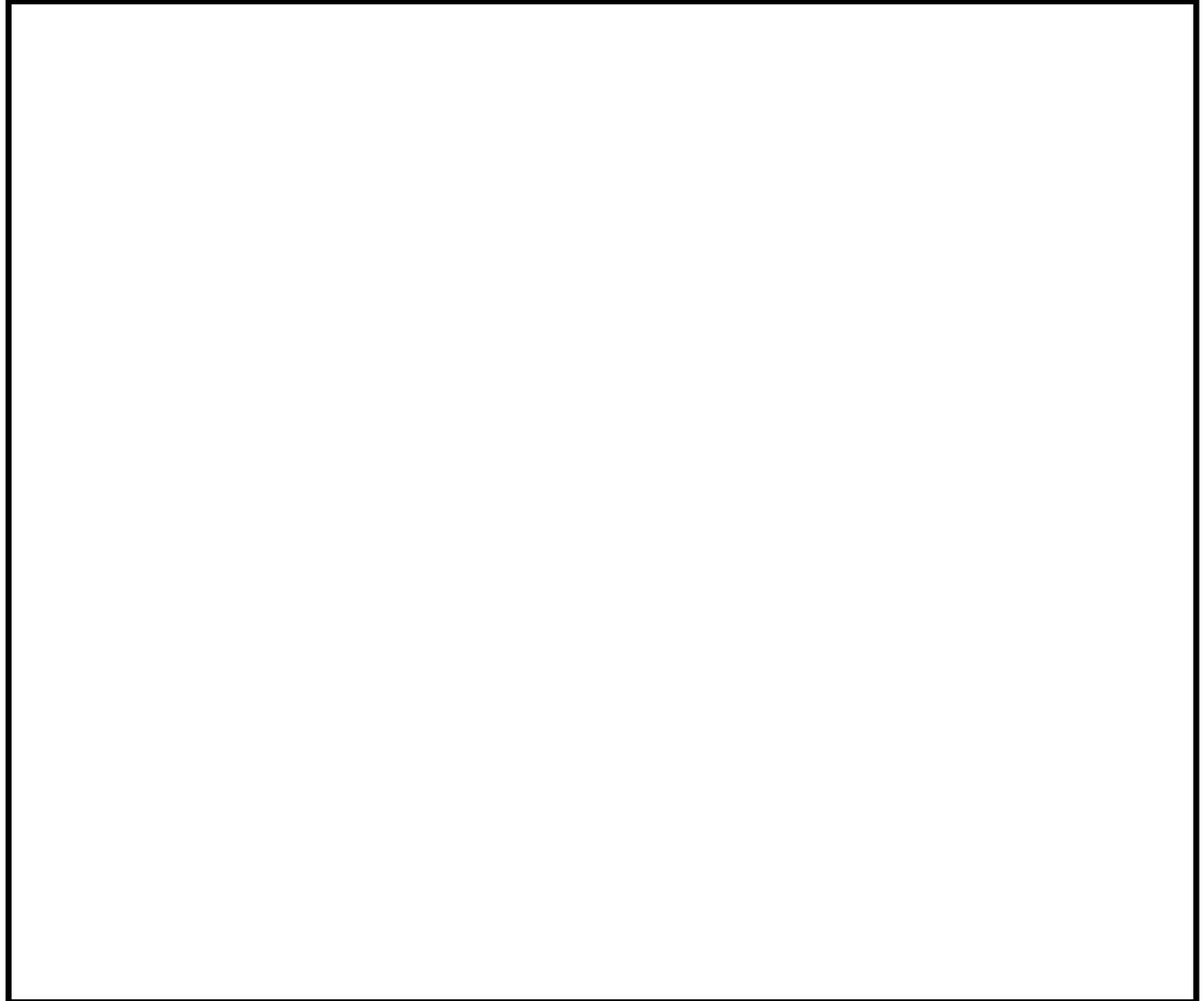
d) Proyec. de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  y Proyec. de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector  $(7, x, -2)$  sea perpendicular a  $\vec{u}$ ?

(Sol.: a) -49; b) 13 y 8,06; c)  $117^\circ 52'$ ; d) -6,077 y -3,769; e)  $x = -\frac{3}{4}$ )

11.- Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:  $\vec{u}(3, -1, 2)$  y  $\vec{v}(1, 0, 3)$  (Sol.:  $(3, 7, -1)$ )

## TEORÍA: Producto vectorial



### Ejercicios

12.- Halla el producto vectorial de  $\vec{u}(3, -5, 1)$  y  $\vec{v}(4, 7, 6)$ . Comprobar que el producto vectorial es perpendicular a cada uno de los vectores. (Sol.:  $(-37, -14, 41)$ )

13.- Halla el área del triángulo determinado por los vectores  $\vec{u}(3, -5, 1)$  y  $\vec{v}(4, 7, 6)$  (Sol.:  $28,49 u^2$ )

14.- Hallar el área del triángulo de vértices  $A(-5, 2, 1)$ ,  $B(1, 7, 5)$  y  $C(-1, 0, 4)$  ( $A = 19,73 u^2$ )

15.- Se consideran los puntos  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(3, 1, 2)$  y  $C(4, 2, -1)$ . Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan. (Sol.:  $\frac{\sqrt{30}}{2} u^2$ )

16.- Hallar el valor de “a” para que al efectuar el producto vectorial de  $u = (1, 2, a)$  y  $v = (a, 3, 1)$  obtengamos el vector  $w = (-4, 3, -1)$ . (Sol.:  $a = 2$ )

**TEORÍA:** Producto mixto



**Ejercicios**

17.- Halla el volumen del paralelepípedo definido por :  $\vec{u}(-5, 1, 7)$  ,  $\vec{v}(4, 7, 3)$  y  $\vec{w}(1, 0, 4)$  (Sol.:  $202 u^3$ )

18.- Halla el volumen del tetraedro que determinan los vectores:  $\vec{u}(1, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(-1, -1, 3)$  y  $\vec{w}(5, 2, 1)$   
(Sol.:  $17/6 u^3$ )

19.- Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(3, 5, 7), B(1, 0, -1), C(7, -1, 4) y D(11, 4, -6)  
(Sol.:  $107 u^3$ )

20.- Halla el valor de  $x$  para que los vectores  $\vec{u}(3, -5, 1)$  ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{w}(1, 14, x)$  sean coplanarios ( es decir que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

21.- Halla el volumen de un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH sabiendo que A(1, 0, 0) , B(2, 3, 0), C(4, 0, 5) y E(7, 6, 3). Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

**(Sol:  $V = 33 u^3$ , G(10, 6, 8), H(9, 3, 8), D(3, -3, 5), F(8, 9, 3))**

22.- Se consideran los puntos P(2, 1, -1), Q(1, 4, 1) y R(1, 3, 1):

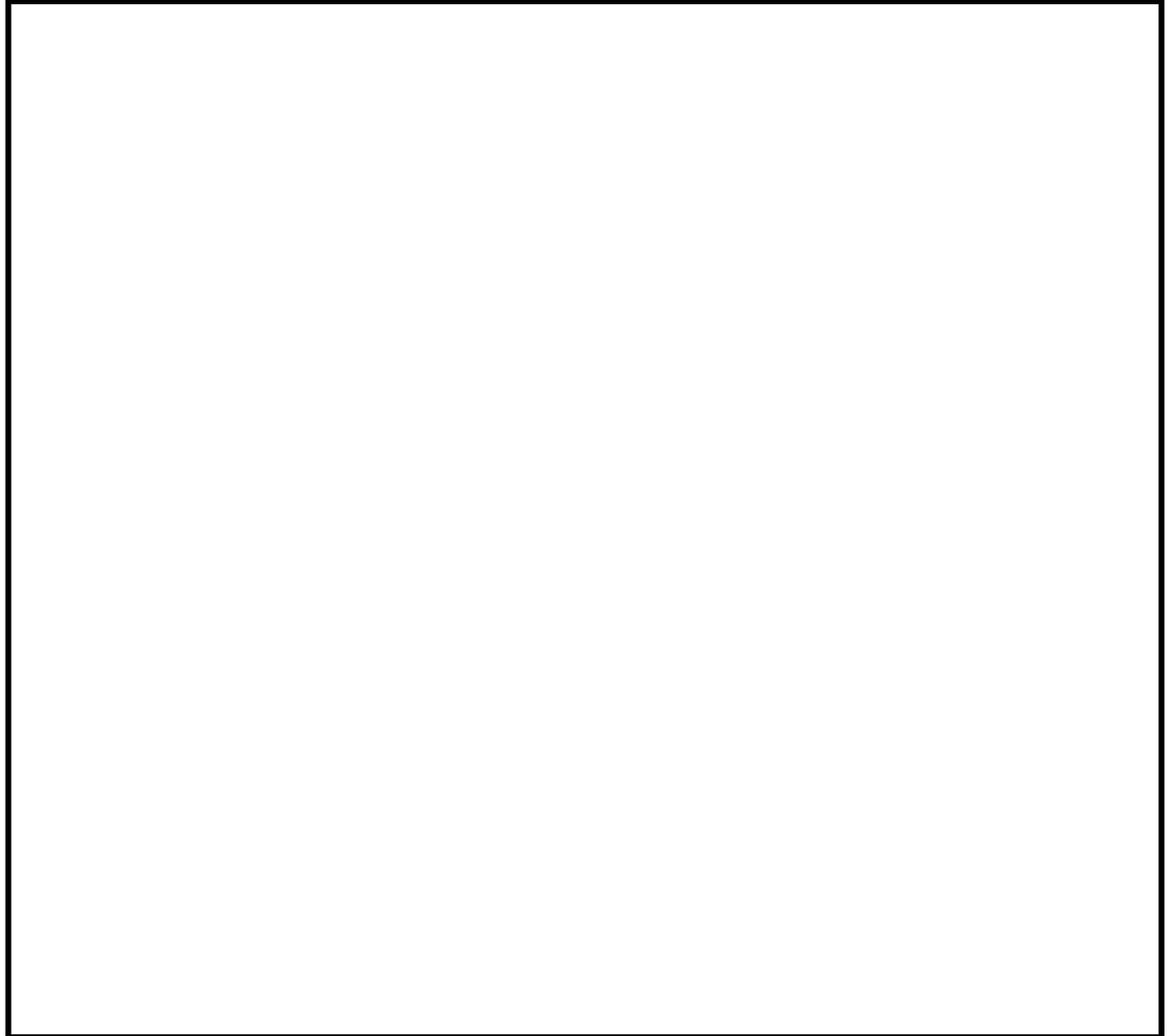
Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

Si desde el punto V(1, 1, -1) se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

**(Sol.: a) Área =  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , b) plano determinado por P, Q y R  $\pi : 2x + z - 3 = 0$ , altura =  $d(V, \pi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$  ,**

**Volumen =  $\frac{1}{3}$  [área base x altura] =  $1 u^3$  )**

## TEORÍA: Ecuaciones de la recta en el espacio



### Ejercicios

**23.-** Dados los puntos A (m, 2, -3), B (2, m, 1) y C (5, 3, -2) determina el valor de m para que estén alineados y hallar la recta que los contiene. (Sol.: m= 6)

**24.-** Obtener las ecuaciones (paramétricas, continuas e implícitas) de la recta que pasa por P(1, -1,0) y es paralela al vector  $\vec{d}(1, -1, 2)$  (Sol.:  $x = 1 + t$ ;  $y = -1 - t$ ;  $z = 2t$ )

**25.-** Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: A(1, 1, 1) y B(2, 0, 3). Localiza dos puntos, además de los dados.

(Sol.: r:  $x + y - 2 = 0$ ,  $2x - z - 1 = 0$ )

**26.-** Halla las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pasa por cada par de puntos:

a) A (3, 0, -7) y B (-7, 2, -1)

b) A (0, 0, 0) y B (1, 0, 0)

27.- Poner en forma implícita las rectas siguientes:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -5 \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \text{b) } s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-1}$$

28.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r:  $\begin{cases} 3x-5y+7z-4 = 0 \\ x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$  que pasa por

P(0, -1, -3): ( El vector dirección de la recta r es  $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  )

29.- Calcular la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto A(1, -1, 2) y que tiene dirección perpendicular a los vectores u (0, 1, 3) y v (1, 1, 1) (Sol.: el vector dirección de la recta es el producto vectorial de u y v,  $u \times v = (-2, 3, -1)$ )

30.- Halla unas ecuaciones paramétricas y continuas para la recta de ecuaciones implícitas:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-y+z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } s: \begin{cases} 2x-2y-z = 0 \\ x+y+z-3 = 0 \end{cases}$$

(Sol.: Resolviendo los sistemas se obtiene las ecuaciones paramétricas de la recta:  $r(x = \alpha, y = -\alpha, z = -3\alpha)$ ;  $s(x = 1 - \mu, y = 1 - 4\mu, z = 1 + 5\mu)$ )

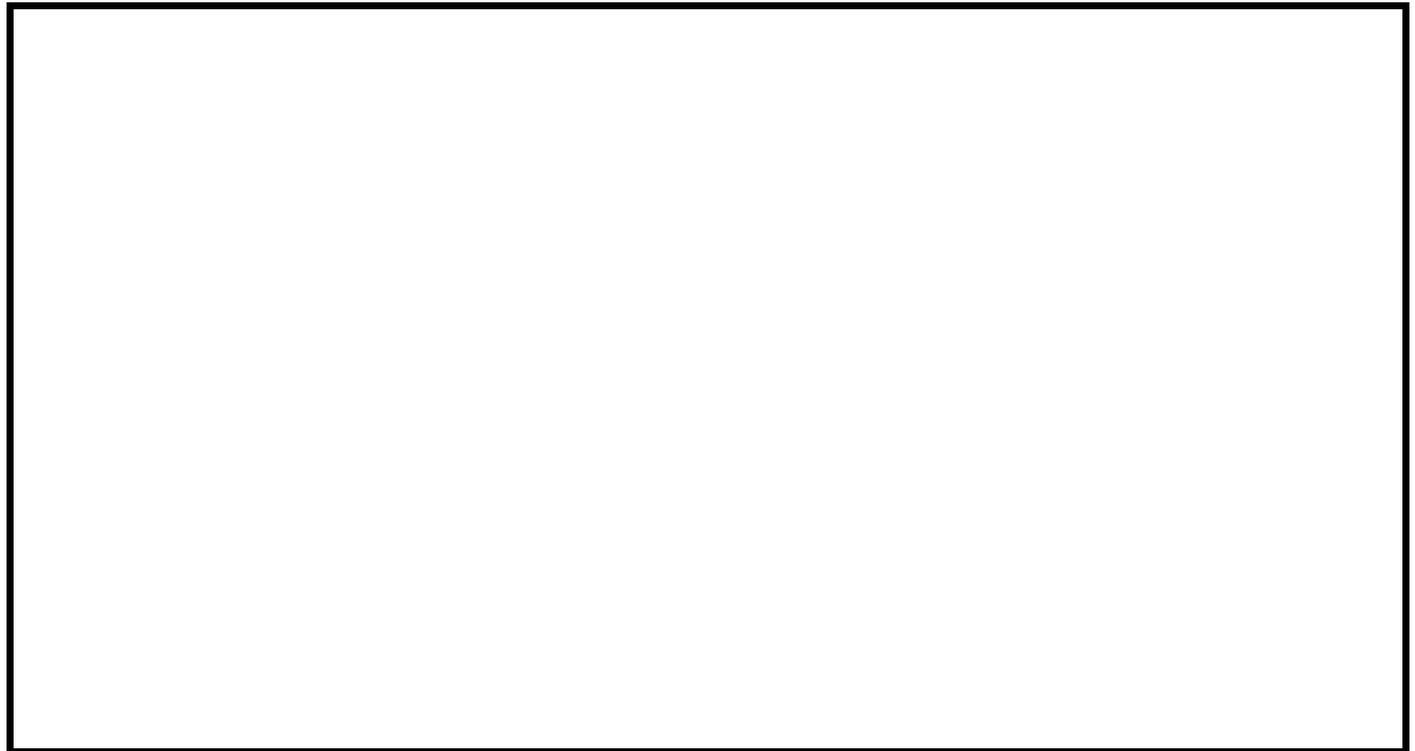
31.- Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta dada:

$$A(5, 1, 4) \quad B(3, 3, 4) \quad C(15, -15, 4) \quad D(1, 6, 0) \quad r: \begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

(Sol.: Al sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación de la recta, si sale el mismo valor de  $\lambda$ , entonces el punto pertenece a la recta, si no sale el mismo valor no pertenece. A y B no pertenece; B sí pertenece)

**TEORÍA:** Ecuaciones del plano en el espacio





### Ejercicios

**32.-** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, 0, 0) y es perpendicular al plano  $\pi : x - y - z + 2 = 0$ . (Sol.:  $r \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ )

**33.-a)** Determina las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(2, 3, 5), B(1, 1, 2) y C(3, 6, 10)

b) Halla otros tres puntos del plano  
Sol.: a)  $x - 2y + z - 1 = 0$ , c)  $n = 4$ )

c) Calcula n para que P( 1, 2, n) pertenezca al plano.

**34.-** Hallar la ecuación del plano que pasa por P(2, 3, 5) y es paralelo a los vectores u(-1, -2, -3) y v(1, 3, 5)  
(Sol.:  $x - 2y + z - 1 = 0$ )

**35.-** Determina las ecuaciones paramétricas del plano  $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$

**36.-** Halla la ecuación implícita de cada uno de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto A(1, -3, 2) y por los vectores u (2, 1, 0) y v(-1, 0, 3)

b) Pasa por el punto P(2, -3, 1) y su vector normal es u(5, -3, -4)

c) perpendicular a la recta  $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$  y que pasa por el punto (1, 0, 1)

(Sol.: a)  $3x - 6y + z - 23 = 0$ ; b)  $5x - 3y - 4z - 15 = 0$ ; c)  $2x - y + 3z - 5 = 0$ )

**37.-** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1) y contiene a la recta de ecuación

$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$  (Sol.:  $4x - 3y + 5z - 13 = 0$ )

38.- Halla la ecuación de un plano que contiene a las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \quad y \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{4} \quad (\text{Sol.: } 18x + 15y - 21z + 33 = 0)$$

39.- Estudia la posición de las siguientes rectas y halla, si es posible, el plano que las contiene:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2} \quad (\text{Sol.: } r//s \text{ y el plano } 2x - z - 4 = 0)$$

40.- Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas  $r: x - 1 = y - 2 = z - 3$  y  $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

(Sol.:  $2x - y - z + 3 = 0$ )

41.- Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto  $P(0, 1, 1)$  y es perpendicular a la recta de ecuación  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$  (Sol.:  $x - y + 3z - 2 = 0$ )

42.- Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta  $r$  y sea perpendicular al plano  $\pi$ , siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } -4x - 3y + z + 8 = 0)$$

43.- Determina la ecuación del plano que contiene al punto  $P(2,1,2)$  y a la recta:  $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$   
(Sol.:  $-2x + y - z + 5 = 0$ )

44.- Comprueba si los puntos siguientes son coplanarios o no:

$A(1, 2, -1)$ ,  $B(3, -1, 4)$ ,  $C(2, 3, 1)$  y  $D(4, 0, 6)$

$A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, 2, 4)$ ,  $C(0, 1, -2)$  y  $D(1, 0, 1)$

45.- Encuentra el valor de  $a$  para que los puntos  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(1, 2, a)$ ,  $C(1, 3, 1)$  y  $D(2, a, 5)$  sean coplanarios.

46.- Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos  $A(-4,0,-2)$  y  $B(0,3,-1)$ , y es perpendicular al plano  $\pi: x + 3z - 5 = 0$  (Sol.:  $9x - 11y - 3z + 30 = 0$ )

47.- Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s: r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$

(El vector normal al plano  $\pi = \vec{d}_r \times \vec{d}_s$ )

48.- Halla "a" para que las rectas  $r$  y  $s$  estén sobre un mismo plano y busca la ecuación de dicho plano.

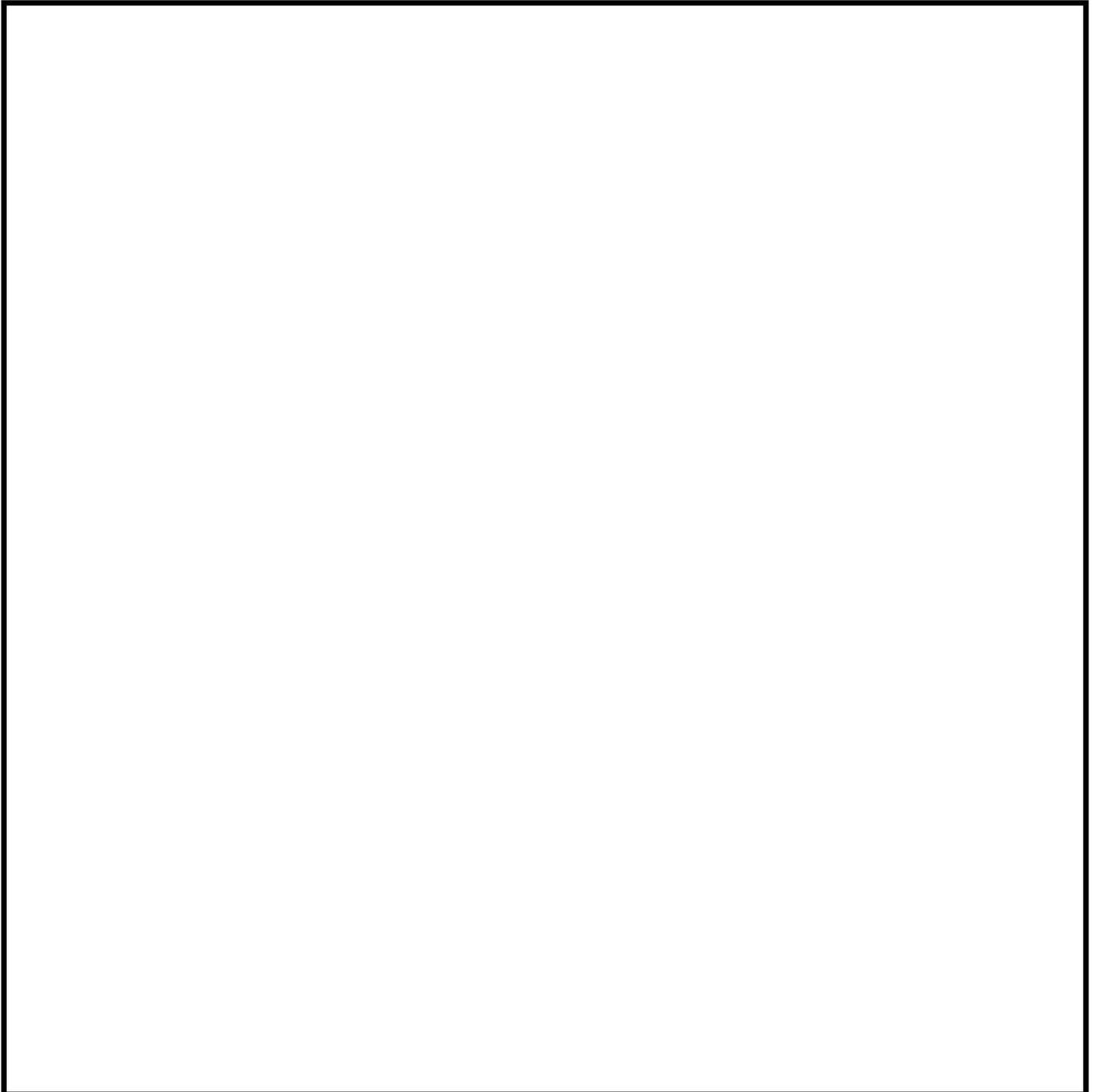
$$r: \begin{cases} 2x + z = a \\ y = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + y = a \end{cases}$$

49.- a) Halla “m” para que las rectas r y s se corten en un punto. Halla para dicho valor la ecuación del plano que las contiene.

$$r: \begin{cases} 4x - y + z = -2 \\ 3x - y + kz = -2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - ky + z = -1 \end{cases}$$

49.- b) Calcula el volumen del tetraedro que determina el plano de ecuación  $x + 3y + 6z - 12 = 0$  al cortar los planos coordenados. (Sol.:  $16 u^3$ )

**TEORÍA:** Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio



## Ejercicios

50.- Estudiar la posición relativa de las rectas r y s :

$$a) r: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2+\mu \\ y = 1-2\mu \\ z = -1-\mu \end{cases} \quad (\text{Sol. : r y s son paralelas})$$

$$b) r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad (\text{Sol.: r y s se cruzan})$$

$$c) r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \quad (\text{Sol.: se cortan en el punto } (-13, 28, 5))$$

51.- Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

$$a) r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3} \quad (\text{Se cruzan})$$

$$b) r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad s: \begin{cases} x-2y-1 = 0 \\ 3y-z+1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Paralelas})$$

$$c) r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \quad s: \begin{cases} x = 3+4\mu \\ y = 3+6\mu \\ z = 4+8\mu \end{cases} \quad (\text{Coinciden})$$

$$d) r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \quad (\text{Se cortan en el punto } (0, 3, 3))$$

$$52.- \text{ Dadas las rectas } r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \quad t: \begin{cases} x-y-1 = 0 \\ 2y-z+2 = 0 \end{cases} \quad \text{Estudia la posición relativa}$$

de cada par de ellas (Sol.: r y s se cruzan; r y t son paralelas; s y t son secantes)

53.- Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5+4\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n} \quad (\text{Sol.: } m = 12 \text{ y } n = -3)$$

54.- Calcula el valor de k para que las rectas r y s se corten en un punto. Halla el valor de ese punto de corte.

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = k-3\lambda \end{cases} \quad (\text{So.: } k = 3; P(3, 1, -3))$$

55.- Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en los siguientes apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 3-5\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6+5\mu \\ y = 4-3\mu \\ z = 2+\mu \end{cases} \quad \text{b) } r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 \end{cases} \quad (\text{Sol: a) } r//s; \text{ b) se cortan; c) se cruzan})$$

56.- Sean las rectas:  $r: \begin{cases} x+y-z = 1 \\ 2x+y-z = 2 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x-2y+z = 3 \\ 2x-2y+z = 1 \end{cases}$  Estudiar su posición relativa (Sol.: se cruzan)

57.- Halla "a" para que las rectas r y s estén sobre un mismo plano.

$$r: \begin{cases} 2x+z = a \\ y = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} -x+2y+2z = 5 \\ x+y = a \end{cases}$$

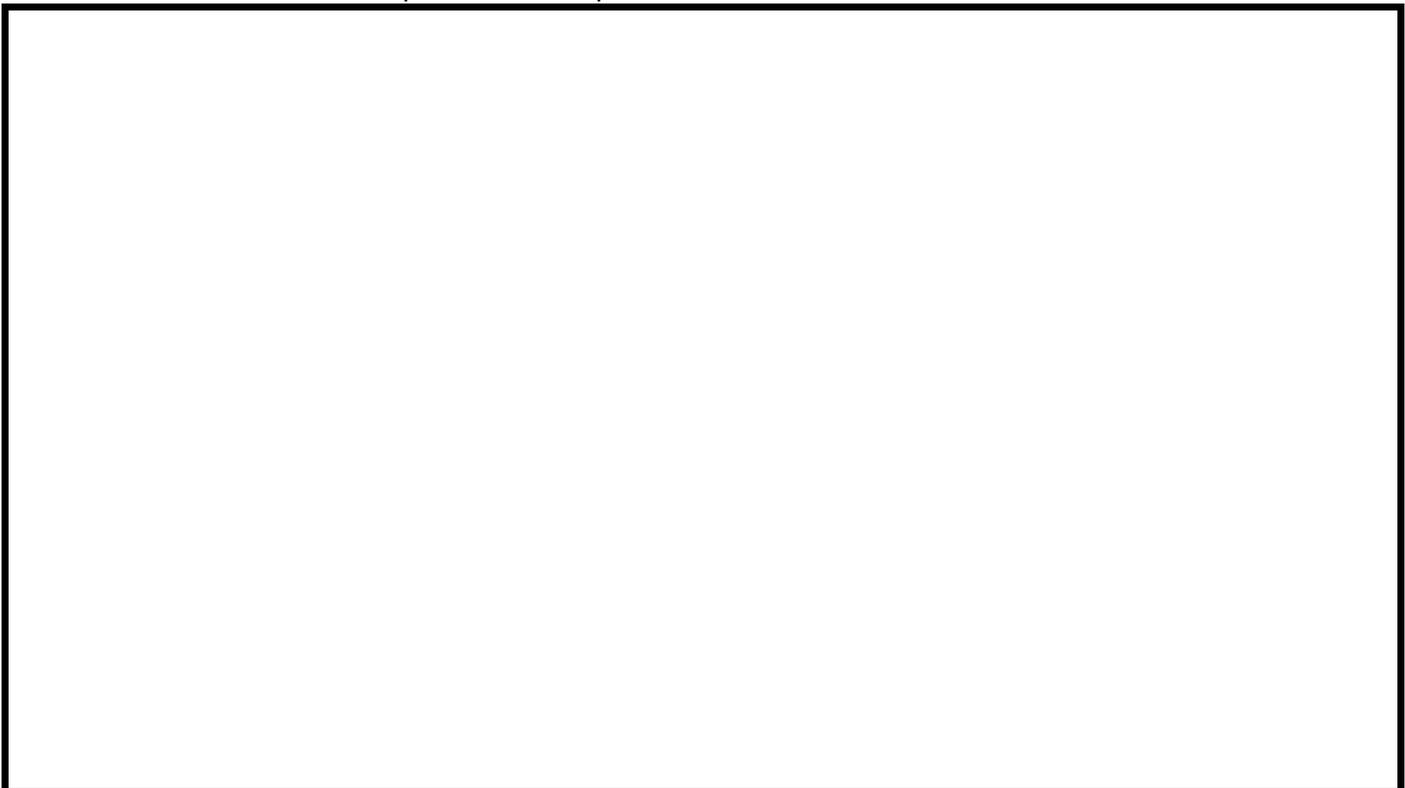
58.- Halla "k" para que las rectas r y s se corten en un punto.

$$r: \begin{cases} 4x-y+z = -2 \\ 3x-y+kz = -2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x+4y+2z = -1 \\ 2x-ky+z = -1 \end{cases}$$

59.- Discute la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro k:

$$r: \begin{cases} 2x-4y+z = k \\ 3x-y = 11 \end{cases} \quad s: \begin{cases} y+z = 6 \\ y-2z = -k \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } k = 6, \text{ las rectas se cortan, si } k \neq 6 \text{ se cruzan})$$

**TEORÍA:** Posición relativa de 2 planos en el espacio





### Ejercicios

60.- Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de planos:

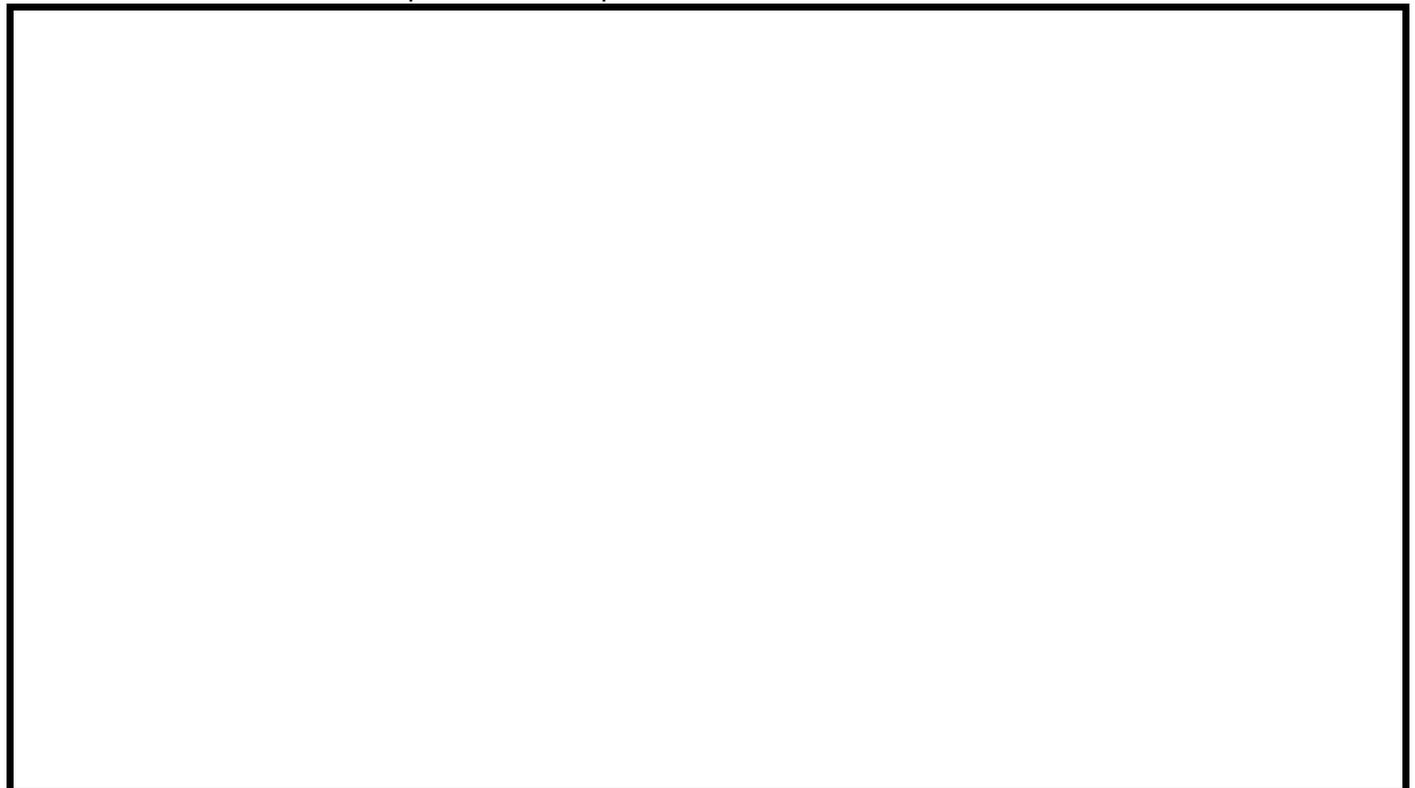
- a)  $\pi: x - 2y + x - 1 = 0$        $\pi': 2x - 4y + 3z - 2 = 0$   
b)  $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$        $\pi': -2x + 4y - 2z + 3 = 0$   
c)  $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$        $\pi': -3x + 6y - 3z + 3 = 0$

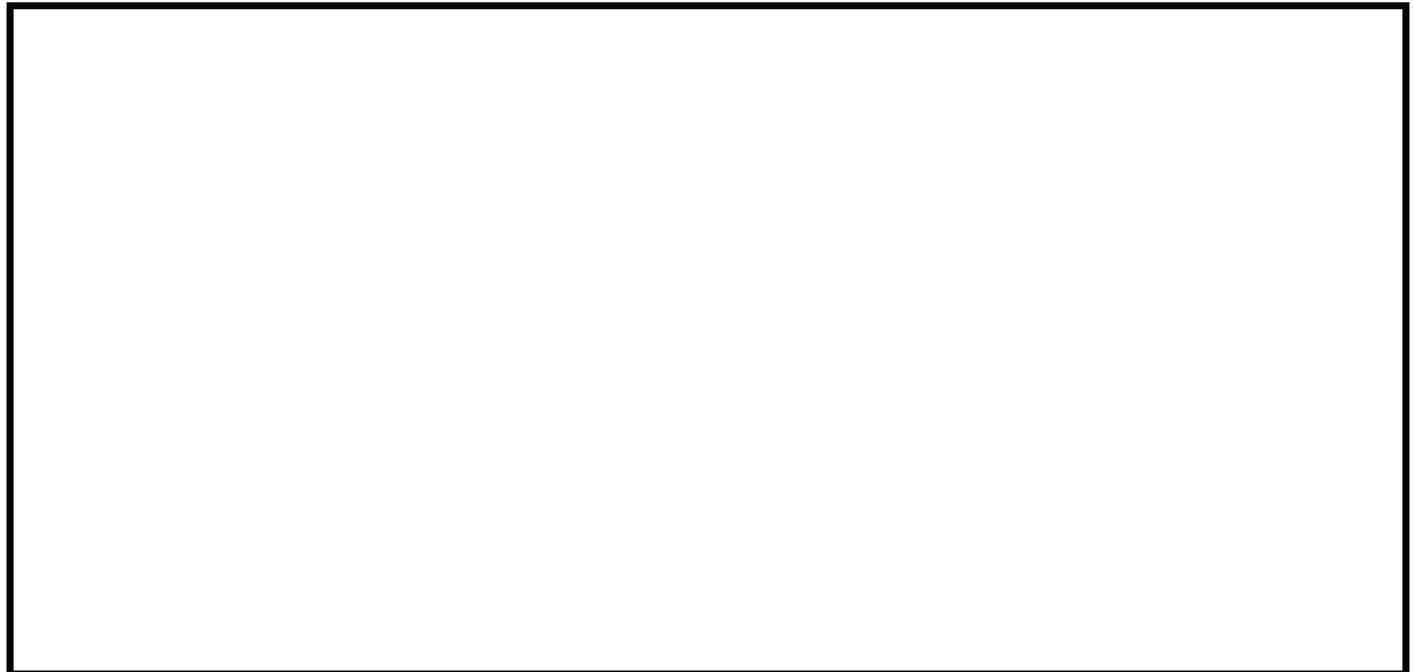
61.- Calcular los valores de a y b para que sean paralelos los planos:

$$\pi: x - 2y + z - 1 = 0 \quad \pi': ax - 4y + 2z + b = 0$$

62.- Halla la posición relativa del plano que contiene al punto  $A(1, 1, -2)$  y es paralelo a los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  y  $\vec{v} = (0, 1, -1)$  con los planos: a)  $\pi: x - 2y - z + 1 = 0$ ; b)  $\pi': -2x + 2y + 2z + 4 = 0$ ; c)  $\pi'': 3x - 3y - 3z + 1 = 0$

**TEORÍA:** Posición relativa de 3 planos en el espacio.





### Ejercicios

**63.-** Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi : x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$\pi' : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\pi'' : -2x - 4y + 4z - 6 = 0 \quad (\text{Sol.: dos planos coincidentes y el otro los corta en una recta})$$

**64.-** Discutir la posición relativa de los planos, según los valores de l parámetro k:

a)  $\pi : x + y + kz = 1$ ;  $\pi' : kx + y + z = 1$ ;  $\pi'' : 2x + y + z = k$  (Sol:  $k = 1$ , los tres planos se cortan en una recta,  $k = 2$  dos planos paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas,  $k \neq 1, 2$  los tres planos se cortan en un punto)

b)  $\pi : kx - 2y + z - 1 = 0$ ;  $\pi' : x - 2ky + kz - 3 = 0$ ;  $\pi'' : x - 4y + kz - k = 0$

**65.-** Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

a)  $\pi : x - y + 2z = 1$ ;  $\pi' : 2x + 2y - z = 2$ ;  $\pi'' : 3x + 5y - 4z = 3$

b)  $\pi : x + y - z = 1$ ;  $\pi' : x - y + z = 2$ ;  $\pi'' : -x + y + z = 1$

c)  $\pi : x + y + z = 1$ ;  $\pi' : x - 2y + z = 0$ ;  $\pi'' : 2x - y + 2z = 0$

**66.-** Determina la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$\text{b) } \pi_1 : x + 2y - z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0$$

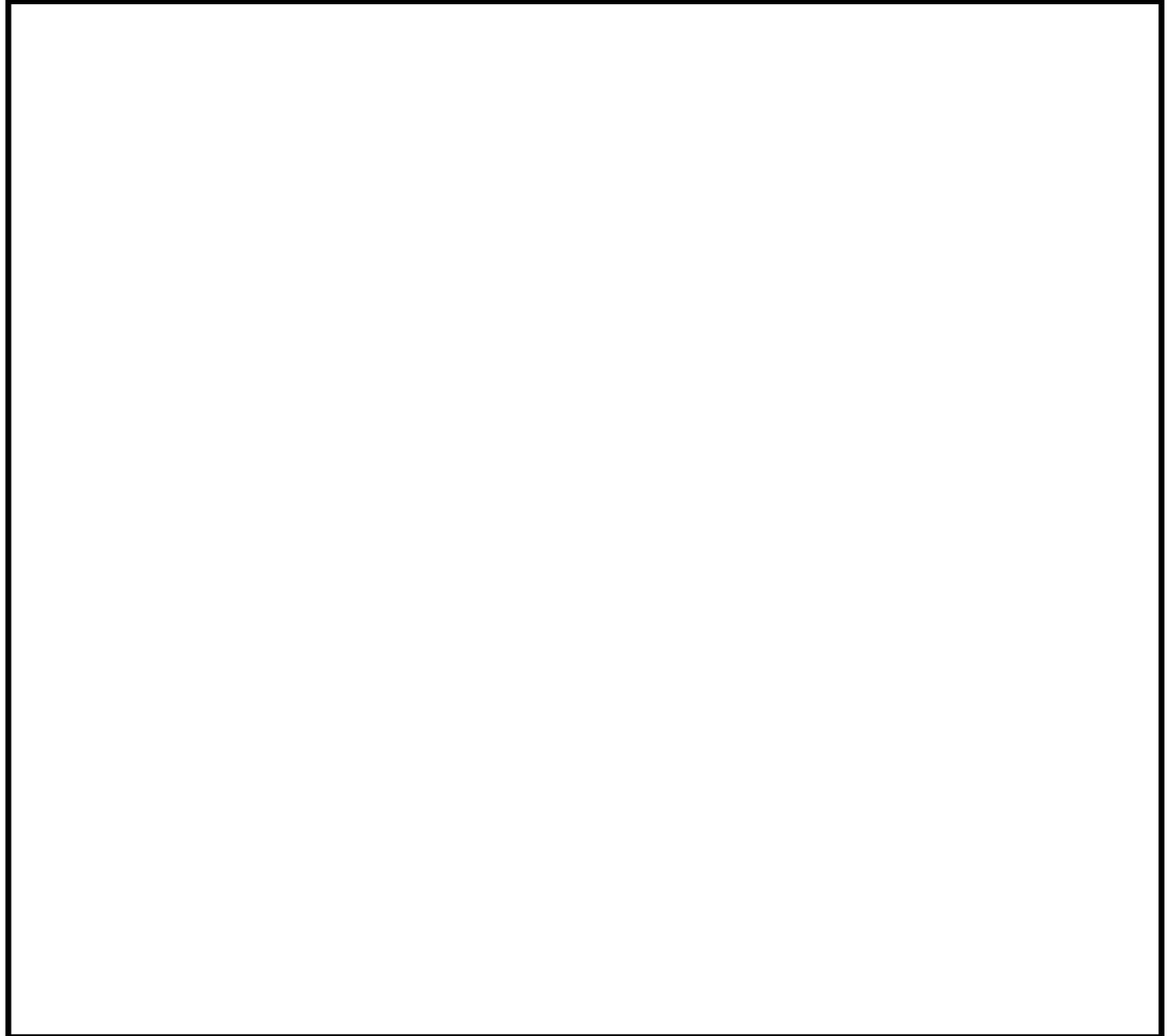
$$\pi_3 : -2x - 4y + 4z - 6 = 0$$

$$\pi_3 : -2x - 3y - 2z - 4 = 0$$

(Sol.: a) S. Compat. Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

b) S. Compat. Los tres planos no paralelos se cortan en una recta).

**TEORÍA:** Posiciones relativas de recta y plano en el espacio



**Ejercicios**

67- Estudiar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$  :

a)  $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$      $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$  (Sol.: la recta contenida en el plano)

b)  $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$      $\pi : x - y + z - 2 = 0$

c)  $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$      $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 - 4\lambda \end{cases}$  (Sol.:  $r$  y  $\pi$  son paralelos)

68.- Determina b para que la recta  $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$  no corte al plano  $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$

69.- Determina los valores de a para que el plano  $\pi: x - 2y + az = 0$  y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$  se corten en un punto.

70.- Determina b para que la recta  $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$  no corte al plano  $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$  (Sol.:  $b = 9$ )

71.- Dado el plano  $\pi: x + y + mz = n$  y la recta  $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ .

- Calcula m y n para que  $\pi$  contenga a r. (Sol.:  $m = 0$ )
- Calcula m y n para que  $\pi$  y r sean paralelos. (Sol.:  $m = 0$  y  $n \neq 2$ )
- Calcula m y n para que  $\pi$  y r sean secantes. (Sol.:  $m \neq 0$ )

72.- Estudia la posición relativa del plano  $\pi: x + y + z + 1 = 0$  y las rectas:

$$S: x = y = \frac{z}{-2} \quad \text{y} \quad r: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } s \text{ y } \pi \text{ son paralelos; } t \text{ está incluida en } \pi)$$

73.- Estudiar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta r, siendo:

$$a) r: \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - y - 4z - 3 = 0 \end{cases} \quad \pi: 4x + 4y + z + 4 = 0$$

$$b) r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \pi: x - y + z - 2 = 0$$

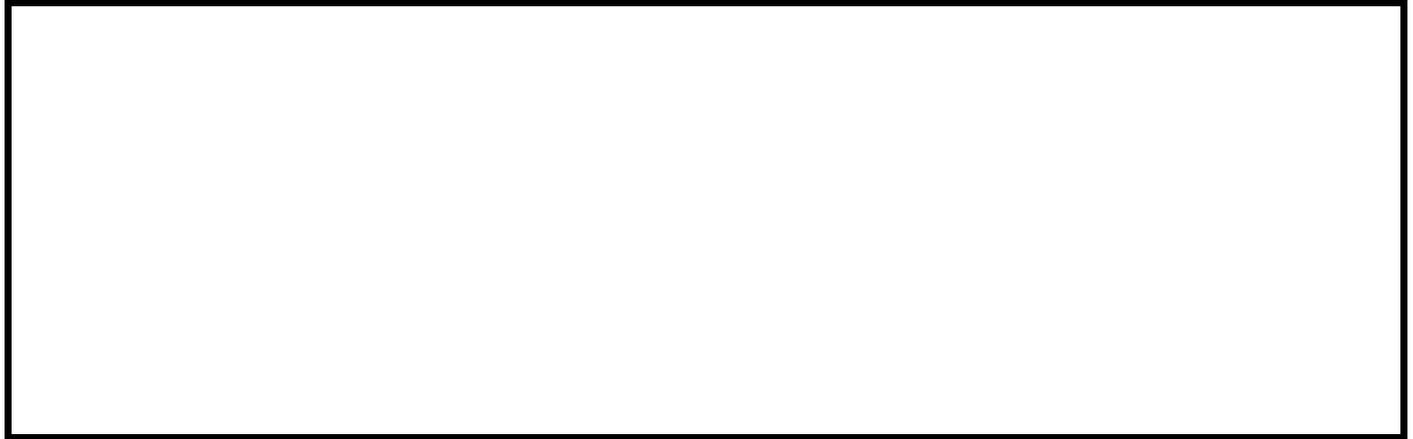
$$c) \pi: x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r \text{ contenida en } \pi)$$

74.- Halla para qué valor de k son paralelos el plano  $\pi: x + ky - z + 1 = 0$  y la recta  $r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

75.- Encuentra el valor de m para que la recta r esté contenida en el plano de ecuación  $\pi: 2x + y + z = -1$ , siendo

$$r: \begin{cases} 3x + my + z = 1 \\ -2x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$$

**TEORÍA:** Haz de planos



### Ejercicios

76.- Halla la ecuación del haz de planos que tiene por eje o arista la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \text{ y calcula, el que pasa por el punto } P(1,1,1) \text{ (Sol.: } x - 2y + z = 0)$$

77.- a) Determina la ecuación del haz de planos que cortan a la recta  $r: \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$

b) Halla el plano del haz que pasa por el punto  $A(1, 0, 3)$

78.- Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1, -3, 1)$  y contiene a la recta  $r$  de ecuación

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - y - 4z - 3 = 0 \end{cases} \text{ (Sol.: } -2x - 4y - 10z = 0)$$



## UNIDAD 7. Problemas métricos.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
7.1 Ángulos entre vectores, rectas, planos, rectas-planos. 7.2 Distancia entre puntos, rectas y planos. 7.3 Problemas métricos.	B4.C3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.	B4.C3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, el significado geométrico, la expresión analítica y las propiedades. B4.C3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y sus propiedades. B4.C3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. B4.C3.4. Utiliza programas informáticos específicos para profundizar en el estudio de la geometría.
<u>Otros estándares evaluables:</u> Límites y continuidad (B3.C1.1, B3.C1.2), Derivadas (B3.C2.1., B3.C2.2), Integrales(B3.C3.1, B3.C4.1, B3.C4.2) Determinantes. Matrices (B2.C1.1. , B2.C1.2., B2.C2.1. , B2.C2.2., B2.C2.3., B2.C2.4.) , Sistemas (B2.C2.5)		

### TEORÍA: Ángulos entre rectas y planos

### Ejercicios

1.- ¿Qué ángulo forma la recta  $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$  con el plano  $\pi: 2x - 5y + 7z - 11 = 0$  (Sol.:  $35^\circ$ )

2.- Hallar el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \quad s: \begin{cases} 2x+3y-5z+4 = 0 \\ x-2y+5 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } 41^\circ 59' 35'')$$

3.- Determina la ecuación de la recta  $r$  que pasa por el punto  $A(3, 0, -1)$  y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0 \quad \pi': 2x - y + 3 = 0 \quad (\text{Sol.: } 67^\circ 1' 23'')$$

4.- Hallar el ángulo entre los planos  $\pi: x - 2y + 4z = 0$  y  $\pi': 2x - y + 3 = 0$  (Sol.:  $67^\circ 1' 23''$ )

**TEORÍA:** Distancia entre 2 puntos.

**TEORÍA:** Distancia de un punto a una recta.

### Ejercicios

5.- Calcula la distancia del punto  $P(5, -1, 6)$  a la recta  $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$  (Sol.:  $\sqrt{12}$ )

6.- Halla razonadamente la distancia de  $P(5, 6, 6)$  a la recta  $r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  (S:  $\sqrt{50}$ )

7.- Halla la distancia del punto  $P(1, 2, 1)$  a la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$  (Sol:  $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{6}}$ )

8.- Distancia del punto  $P(1, 2, 1)$  a la recta  $s: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$  (Sol: 1)

9.- Sea el punto  $P(3, -3, 1)$  y la recta  $r: (x, y, z) = (2, 3, 4) + \lambda(-1, 2, 1)$

a) Halla la proyección del punto  $P$  a la recta  $r$ .

b) Halla la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$ . (Sol.: a)  $(14/3, -7/3, 4/3)$  b)  $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$ )

10.- Halla la proyección ortogonal del punto  $P(1, 2, 1)$  a la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$

(Sol.:  $H(16/6, -13/6, 11/6)$ )

11.- Calcula el simétrico del punto  $A(1, 0, 1)$  respecto de la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$  (Sol.:  $A'(3, 2, 1)$ )

12.- Determina el punto simétrico de  $A(-3, 1, -7)$  respecto de la recta  $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

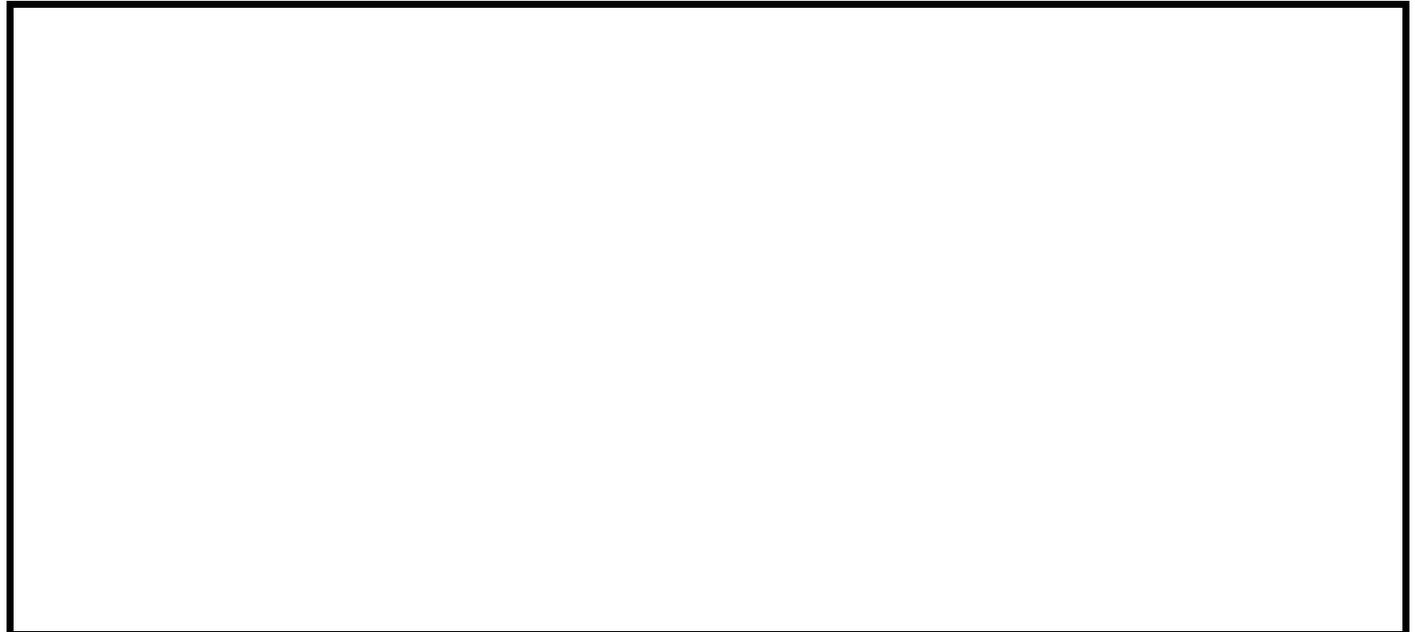
(Sol.:  $A'(-3, -3, -3)$ )

13.- Calcula el simétrico de  $P$  respecto de  $r$  en cada caso:

$P(2, 1, 0)$ ;  $r: (5 + 2\lambda, 2 - \lambda, -2)$

$P(1, -1, 3)$ ;  $r: (-\lambda, 0, 8 + \lambda)$  (Sol.: a)  $P'(4, 5, -4)$  b)  $P'(5, 1, 7)$ )

**TEORÍA:** Distancia entre un punto a un plano



### Ejercicios

14.- Sea  $P(3, 2, -1)$  y el plano  $\pi: 2x - y - 2z + 3 = 0$ . Se pide:

La proyección ortogonal de  $P$  sobre  $\pi$ . b) La distancia del punto  $P$  al plano  $\pi$ .

(Sol.: a)  $H(1, 3, 1)$  b)  $d = 3$ )

15.- Calcula la distancia del punto P (5, 5, 3) al plano  $\pi : (x, y, z) = (0, 0, 4) + \lambda (2, 2, -1) + \mu (-3, 2, 0)$

( Sol:  $d(P, \pi) = \frac{15}{\sqrt{113}}$  )

16.- Halla la distancia de P(3, 1, 7) a  $\pi : x - 3y + 5z - 1 = 0$  (Sol.:  $\frac{34}{\sqrt{35}}$  )

17.- Halla el punto simétrico de P(1, 2, 3) respecto del plano  $\pi : x - 3y - 2z + 4 = 0$  (Sol.: P'(2, -1, 1))

**TEORÍA:** Distancia entre 2 rectas.



**Ejercicios**

18.- Calcular la distancia entre las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } 3)$$

19.- Halla la distancia entre las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r // s, d = 5/\sqrt{3})$$

20.- Calcular la distancia entre las rectas r y s, dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } d = 0, \text{ las rectas se cortan})$$

21.- Halla la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3} \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{3} \quad (\text{Sol.: } d(r, s) = \frac{84}{\sqrt{91}})$$

22.- Sea r la recta que pasa por A(2, 4, 0) y B(6, 2, 0) y sea s la recta que pasa por C(0, 0, 7) y D(3, 2, 0). Obtén, de manera razonada, la distancia entre r y s. (Sol.:  $\sqrt{2}$ )

23.- Determina la distancia entre las rectas:

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{4} = z+1 \quad s: (x, y, z) = (4, 2, 1) + \mu(2, 4, 1), \mu \in \mathbb{R}$$

$$(\text{Sol.: } r // s; d(r, s) = \sqrt{665} / 7 \text{ u})$$

**TEORÍA:** Distancia de una recta a un plano.

**Ejercicios**

24.- Calcular la distancia de la recta  $r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$  al plano  $\pi \equiv x - 3y - z + 6 = 0$  (Sol.:  $\frac{8}{\sqrt{11}}$ )

25.- Considera la recta r y el plano  $\pi$  de ecuaciones:  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-1}{2}$   $\pi \equiv ax + 2y - 3z - 3 = 0$

Determina para qué valores del parámetro a la recta r y el plano  $\pi$  son paralelos.

Halla la distancia entre la recta r y el plano  $\pi$  para el valor hallado de a en el apartado anterior.

**TEORÍA:** Distancia entre 2 planos.

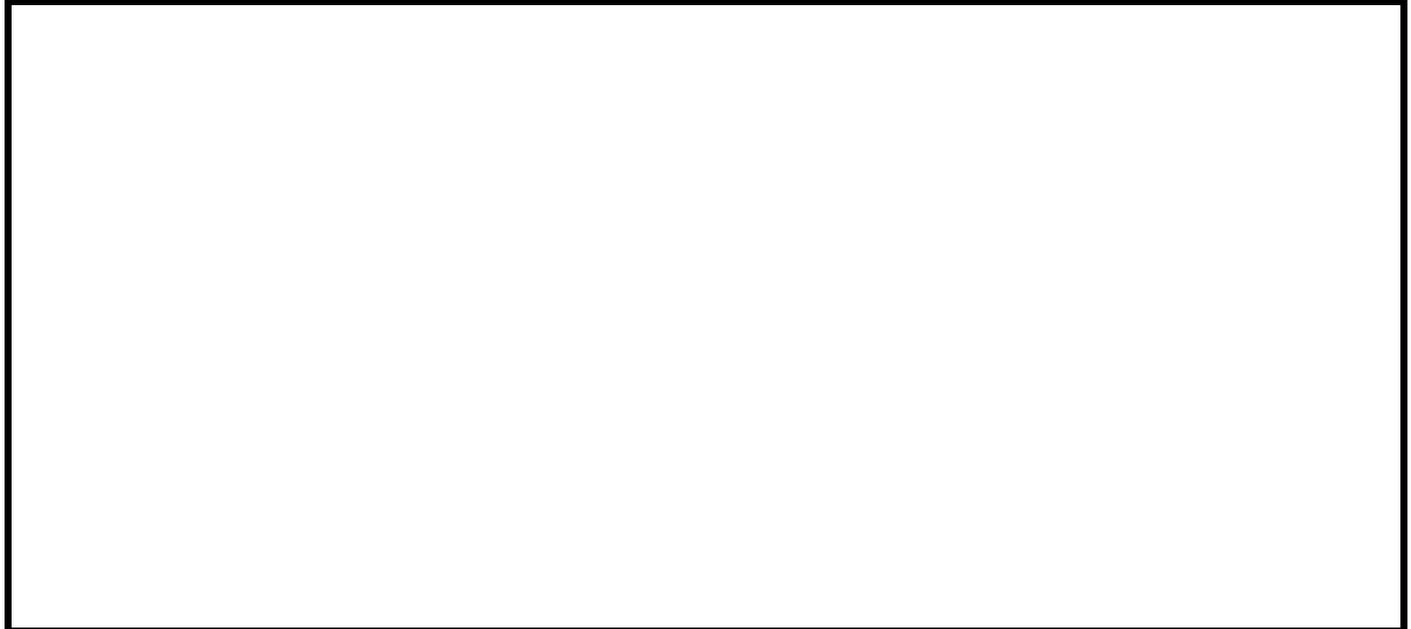
**Ejercicios**

26.- Calcular la distancia entre los planos:

a)  $\pi \equiv x - 5y + 2z - 19 = 0$      $\pi' \equiv 2x - 10y + 4z = 0$     (Sol.:  $\frac{38}{\sqrt{120}}$ )

b)  $\pi \equiv y - 5z + 4 = 0$      $\pi' \equiv 2y - 10z = 0$

**TEORÍA:** Perpendicular común a dos rectas que se cruzan



**Ejercicios**

27.- Dadas las rectas r y s:  $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.  
(Sol.: R (2/3, -7/6, -1/6) , S (2/3, -2/3, -2/3))

28.- Sean dos rectas r y s que se cruzan:  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$   $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

Calcular la ecuación de su perpendicular común.

29.- Comprueba que las rectas  $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$  y  $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$  se cruzan, y halla la ecuación de la perpendicular común a ambas. (Sol:  $p \equiv \begin{cases} 5x-16y-7z-21 = 0 \\ x-2y+z+5 = 0 \end{cases}$ )

30.- Dadas las rectas de ecuaciones  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  y  $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ , determina:

- a) La posición relativa de r y s.
- b) La ecuación de la perpendicular común a r y a s.
- c) Las coordenadas de los puntos donde la perpendicular común corta a r y a s.
- d) La distancia entre las rectas r y s.

31.- Dados la recta  $r \equiv \begin{cases} x-2z+3 = 0 \\ y-z-4 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$ , halla la ecuación de una recta situada en el plano  $\pi$ , que pase por el punto P (2, 1, -1) y sea perpendicular a r. (Nota : vector dirección de r, es  $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ , es paralelo al vector dirección de la recta r')

## UNIDAD 8. Estadística y Probabilidad.

Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares evaluables
<p>8.1 Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Definición axiomática de probabilidad.</p> <p>8.2 Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.</p> <p>8.3 Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.</p> <p>8.4 Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades a priori, a posteriori y verosimilitudes de un suceso.</p>	<p>B5.C1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.</p>	<p>B5.C1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento o las fórmulas derivadas de los axiomas de la probabilidad.</p> <p>B5.C1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.</p> <p>B5.C1.3. Calcula la probabilidad a posteriori de un suceso aplicando la Teorema de Bayes.</p>
<p>8.5 Variables aleatorias discretas. Función de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.</p> <p>8.6 Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.</p> <p>8.7 Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.</p> <p>8.8 Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.</p>	<p>B5.C2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.</p>	<p>B5.C2.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica.</p> <p>B5.C2.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad o aproximando mediante una distribución normal, usando los métodos adecuados.</p> <p>B5.C2.3. Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico.</p> <p>B5.C2.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica.</p>
<p>Otros estándares evaluables: Los estándares correspondientes a los temas anteriores</p>		

### TEORÍA. Experimentos aleatorios

**TEORÍA:** Espacio muestral. Suceso aleatorio. Espacio de sucesos.

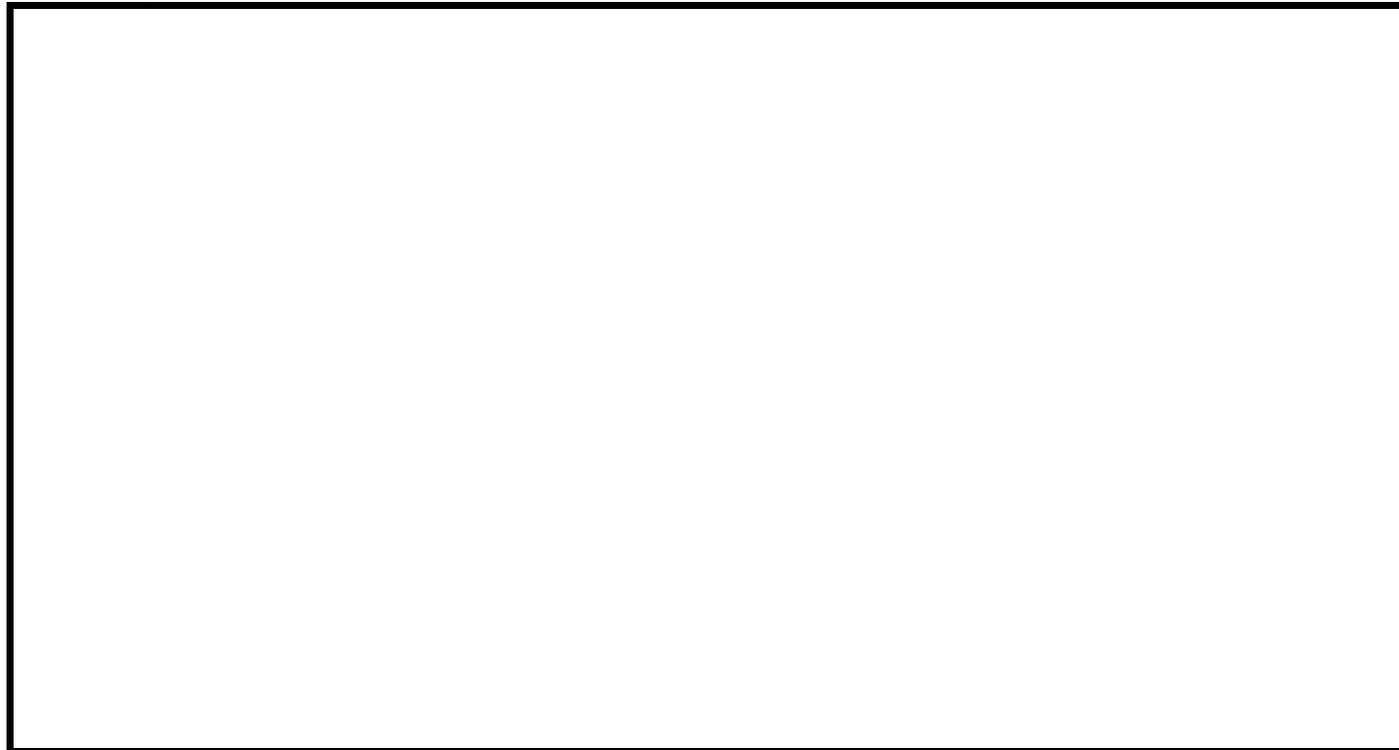
**TEORÍA:** Tipos de sucesos.

### Ejercicios

- 1.- Determina el conjunto de todos los sucesos de los siguientes experimentos aleatorios
  - a) Al lanzar una moneda y anotar el resultado, determina el espacio muestral y el conjunto de sucesos  $S$
  - b) Al lanzar un dado de quiniela y anotar el resultado, determina espacio muestral y conjunto de sucesos  $S$
- 2.- Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior:
  - a) ¿Cuál es el espacio muestral?
  - b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales
  - c) ¿Cuántos sucesos tiene este experimento?

3.- Sea el experimento de lanzar un dado con las seis caras numeradas del 1 al 6. Determinar el espacio de sucesos.

**TEORÍA:** Operaciones con sucesos.



**Ejercicios**

4.- Consideramos el experimento “lanzar un dado”. A partir de los sucesos:

$$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4\}$$

a) Obtener los conjuntos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$

b) Obtén los conjuntos  $(A \cup B)'$ ,  $(A \cap B)'$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ , y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan

c) Calcula  $B \cup C$  y  $B \cap C$ , y razona los resultados.

5.- En el lanzamiento de un dado se define los sucesos  $A =$  “obtener un resultado par”,  $B =$  “obtener un resultado mayor que 4” y  $C =$  “obtener 1”. Calcula:

a)  $A \cup B$     b)  $A \cap B$     c)  $\overline{A \cup B}$     d)  $\overline{A \cap B}$     e)  $A \cap \bar{B}$     (Sol.: a)  $\{2,4,5,6\}$  b)  $\{6\}$  c)  $\{1,3\}$   
d)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e)  $\{2,4\}$  )

6.- Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos  $A =$  “ sale al menos dos cruces” y  $B =$  “ sale alguna cara”. Calcula los sucesos  $(A \cup B)$ ,  $(A \cap B)$ ,  $(A - B)$  y  $(B - A)$

(Sol.:  $A \cup B =$  “ XXX, CXX, XCX, XXC, CCC, CCX, CXC, XCC”;  $A \cap B =$  “ CXX, XCX, XXC”;  $A - B = A \cap \bar{B} =$  “ XXX”;  $B - A = B \cap \bar{A} =$  “ CCC, CCX, CXC, XCC”

7.- Si una persona sintoniza habitualmente dos emisoras de radio, “ Radio A” y “Radio B”, definir los siguientes sucesos:  $A \cup B$ ,  $\overline{A \cup B}$ ,  $A \cap B$ ,  $\overline{A \cap B}$

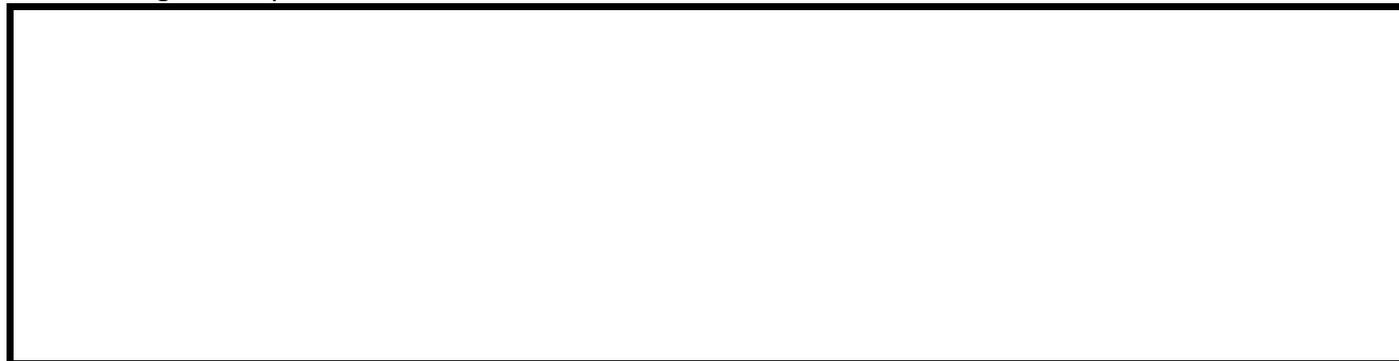
(Sol.: a) “escucha alguna de las dos emisoras”, b) “no escucha ninguna emisora” equivalente a no escucha Radio A, ni escucha Radio B, c) “escucha las dos emisoras”, d) “no escucha las dos emisoras” equivalente a “no escuchar A o no escuchar B”

**TEORÍA:** Frecuencia absoluta y frecuencia relativa de un suceso A

**TEORÍA:** Ley de los grandes números

**TEORÍA:** Definición axiomática de probabilidad. Propiedades.

## TEORÍA: Regla de Laplace



### Ejercicios

8.- En el lanzamiento de un dado, calcular las probabilidades:

- a) A = “obtener un número par”      b) B = “obtener un resultado mayor que 4”  
c) C = “obtener múltiplo de 3 “      d) D = “obtener un resultado menor que 3”

9.- En una baraja de 40 cartas, hallar:

- a) P[as]    b) P[oros]    c) P[figura]      (Sol.: a) 0,1; b) 0,25; c) 0,3)

10.- Se lanzan dos dados. Se pide:

- a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen sea múltiplo de tres.  
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

(Sol.: a)  $P(A) = 12 / 36 = 1/3$     b)  $P(B) = 1/3$ )

11.- **PAU** María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado. Si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

- a) Calcule la probabilidad de que gane Laura, asociado al experimento.  
b) Probabilidad de que gane María.      (Sol.: a)  $P(\text{gana Laura}) = 1/6$ ; b)  $P(\text{gana María}) = 1/6$ )

12.- En el experimento aleatorio de estudiar las familias de tres hijos por el sexo de dichos hijos consideramos los siguientes sucesos:

A = “ el hijo mayor es varón”    B = “los tres hijos tienen igual sexo”    C = “ningún hijo es varón”

Encuentra los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: E; A; B; C;  $A \cap B$ ;  $A \cap C$ ;  $\bar{B}$

(Sol.:  $P[E] = 8/8 = 1$ ;  $P[A] = 4/8 = 1/2$ ;  $P[B] = 2/8 = 1/4$ ;  $P[A \cap B] = 1/8$ ;  $P[A \cap C] = 0$ ;  $P[\bar{B}] = 6/8 = 3/4$ )

**TEORÍA:** Diagramas de árbol.

**Ejercicios**

**13.-** En una urna hay 4 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se sacan 2 bolas de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas? ¿Y la de que ambas sean iguales? (Nota: Realiza un diagrama de árbol)

(Sol.:  $P(\text{extraer dos bolas rojas}) = 1/36$ ;  $P(\text{extraer dos bolas iguales}) = 5/18$ )

**14.-** Se tiene una bolsa con 7 bolas verdes y 5 rojas, de la que se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean verdes? ¿Y de que sean del mismo color? (Sol.: a)  $P(3 V) = 0,1591$  b)  $P[3 V \text{ o } 3 R] = 9/44 \cong 0,2045$ )

**TEORÍA:** Probabilidad condicionada.

## Ejercicios

**15.-** Al extraer una carta de la baraja española, se consideran los siguientes sucesos: B = “ obtener bastos”, F=“obtener una figura” y R =“obtener rey”.

a) Halla la probabilidad  $P(R/F)$  (Sol.:  $P(R/F) = 1/3$ )

b) Comprobar si los sucesos B y F por un lado, y R y F, por otro, son o no independientes. (Sol.: B y F independientes; R y F son dependientes)

**16.-** En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es  $1/3$ , de que se active la segunda es  $2/5$  y de que se activen las dos a la vez es  $1/15$ . ¿Cual es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas? (Sol.:  $P(A_1 \cup A_2) = 2/3$ ;  $P(\text{no sea active ninguna}) = 1/3$ )

**17.-** a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que  $P(A) = 0'5$ , que  $P(B) = 0'4$  y que  $P(A \cup B) = 0'8$ , determine  $P(A/B)$ .

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que  $P(C) = 0'3$ , que  $P(D) = 0'8$  y que C y D son independientes, determine  $P(C \cup D)$ .

(Solución a)  $P(A/B) = 0'25$  b) C y D son independientes, determine  $P(C \cup D) = 0'86$ )

**18.-** Tenemos una bolsa con bolas de colores numeradas. Si se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad:

a) de que el número sea par con la condición de que sea del color verde

b) de que el número sea par con la condición de que sea del color rojo

c) de que el número sea par con la condición de que sea del color negro

(Sol.: a)  $P[\text{par/verde}] = \frac{P[\text{par y verde}]}{P[\text{verde}]} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$ ; b)  $1/2$ ; c) 1)

**19.- PAU** Se lanzan dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 10?

b) Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres? (Sol.:  $P(A) = 3/36 = 1/12$  . b) En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. . Por tanto,  $P(B/A) = 2/6 = 1/3$ )

**20.-** Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. De ellas se extraen, al azar y sin reemplazamiento, dos bolas. Construye un diagrama de árbol asociado al experimento. A partir de él determina:

a) la probabilidad de que las bolas extraídas sean de distinto color.

b) Si las bolas han resultado de distinto color, ¿cuál es la probabilidad de que la primera fuese blanca?

(Sol.: a)  $P[B \text{ y } N] = 30/56$ ; b)  $P[1^a B/B \text{ y } N] = (P(1^a B) \cdot P(2^a N / 1^a B)) / P(B \text{ y } N) = 1/2$ )

**21.-** El departamento de Matemáticas de cierto Instituto ha decidido que este año aprobarán esta asignatura aquellos que superen uno de los dos exámenes propuestos a lo largo del curso. Se sabe que el primer examen lo aprobó un 62% de los alumnos, mientras que el segundo lo aprobó un 45%. Al final han aprobado la asignatura un 75% de los alumnos. ¿Cuál hubiera sido el porcentaje de si hubiera exigido la superación de las dos pruebas para aprobar la asignatura? (Sol.:  $P(A \cap B) = 0'32$ ; 32%)

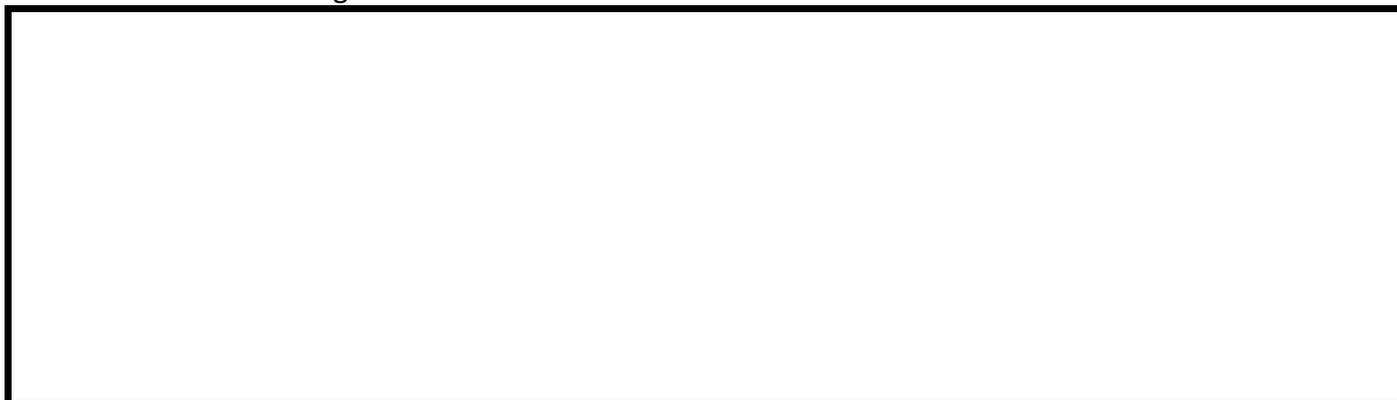
22.- La probabilidad de que una persona use gafas es 0,6; la probabilidad de que tenga los ojos claros es 0,6 y la probabilidad de que use gafas y tenga ojos claros es 0,52. Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar:

a) No use gafas    b) Use gafas o tenga los ojos claros.    c) No use gafas o no tenga los ojos claros

(Sol.: a)  $P(\bar{A}) = 0,4$ ; b)  $P(A \cup B) = 0,68$ ; c)  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,48$ )

23.- En un centro escolar el 80% de los alumnos practican algún deporte, el 25% tocan un instrumento musical y el 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno de ese centro elegido al azar no realice ninguna de las dos actividades. (Sol.:  $P[\bar{D} \cup \bar{M}] = 0,90$ ;  $P[(\bar{D} \cup \bar{M})] = 1 - P[D \cup M] = 0,10$ )

**TEORÍA:** Tablas de contingencia



**Ejercicios**

24.- Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla. Si se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad que sea chica? ¿Y la probabilidad de que sea chica de 1º? ¿Y la probabilidad que si es de 2º sea chica? ¿Y la probabilidad de que sea de 2º si es una chica] (Sol.: a)  $P[\text{sea una chica}] = 120/230$ ; b)  $P[\text{sea chica de 1º}] = 65/230$ ; c)  $P[\text{sea chica/ser de 2º}] = 55/105$ , d)  $P[\text{sea de 2º/ ser chica}] = 55/120$ )

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

25.- La siguiente tabla muestra un estudio sobre el hábito de hacer deporte en un grupo de hombres y mujeres.

	Hombre	Mujer	Total
Deportista	50	70	120
No deportista	70	60	130
Total	120	130	250

a) Calcular la probabilidad de A = “Deportista/Hombre”

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer sabiendo que no es fumadora?

(Sol.: a)  $P(A) = 50 / 120 = 5 / 12$  ; b)  $P(B) = 60 / 130 = 6 / 13$ )

26.- Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos son mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio solo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos son mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos son mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis. (Sol.: Realizara una tabla de contingencia.  $P$  (varón y de la sección de tenis) =  $150/1000= 0,15$ )

**TEORÍA:** Teorema de la probabilidad total

**TEORÍA:** Teorema de Bayes

### Ejercicios

27.- (Murcia, septiembre de 2009) En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20% de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40% son de primero de bachillerato y el 30% participan en la de fútbol, de los cuáles el 25% son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

28.- Según la revista Al-móvil, el 63% de los usuarios de móvil en España tiene un “Smartphone”. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77% lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otros tipos de teléfono móvil solo el 8% lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

29.- Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

**30.- (Murcia, junio de 2009)** En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

**31.-** Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo. a) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores

**32.-** En una clase de segundo de bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano y sea chica?

c) Si resulta que no practica el balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

**33.-** Una fábrica tiene tres cadenas de producción,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La cadena  $A$  fabrica el 50 % del total de los coches producidos; la  $B$ , el 30 %, y la  $C$  el resto. La probabilidad de que un coche sea defectuoso es: en la cadena  $A$ ,  $1/2$ ; en la  $B$ ,  $1/4$ , y en la  $C$ ,  $1/6$ . Calcule razonadamente:

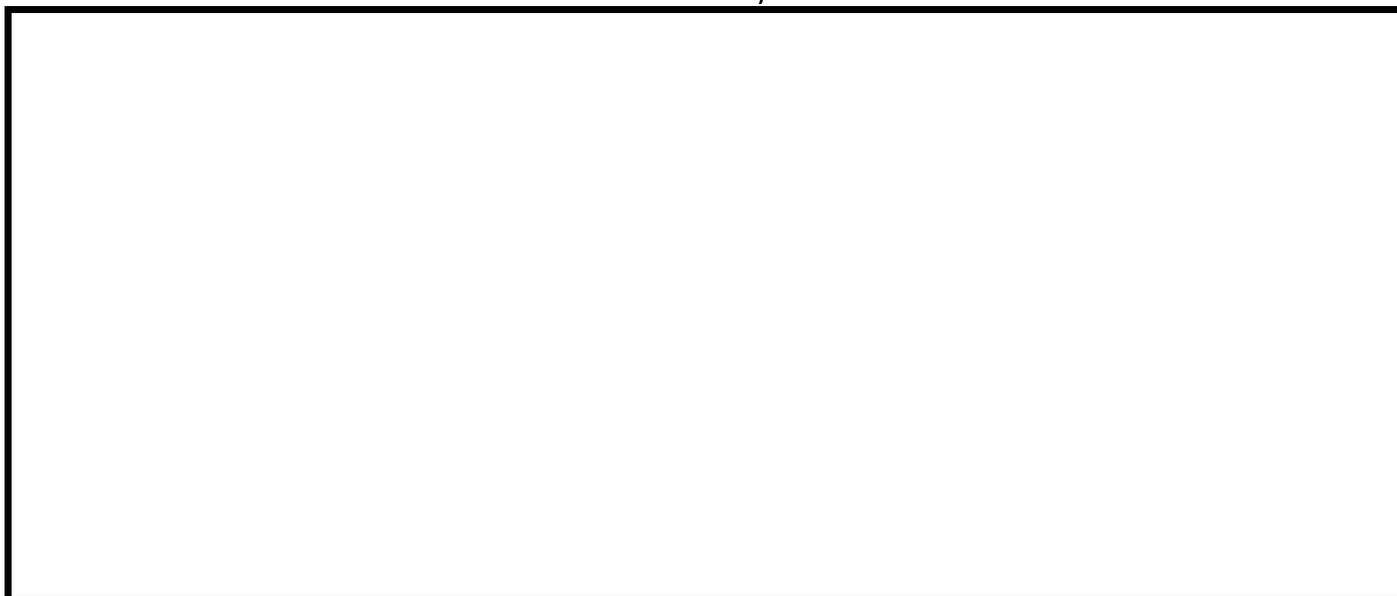
a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena  $A$ .

b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.

c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena  $C$ ?

**34.-** Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35% cursa Economía; el 38% Derecho; el 27% restante estudia matemáticas. Si cada curso finaliza sus estudios de grado un 18% de los estudiantes de Economía, un 20% de los de Derecho y un 15% de los de Matemáticas, ¿qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios? (Sol.:  $P[F] = 0,1797$ , es decir un 17,97%)

**TEORÍA:** Variable aleatoria. Variables aleatorias discretas y continuas.



**TEORÍA:** Función de probabilidad de variable aleatoria discreta. Función de distribución.

**Ejercicios**

**35.-** Se lanza dos monedas y contamos el número de caras. Calcula:

- a) La función de probabilidad, y represéntala gráficamente
- b) Los parámetros media y desviación típica

(Sol.: Espacio muestral  $E = (C,C) (C,X) (X,C) (X,X)$ )

Variable aleatoria discreta :  $X = n^\circ$  de caras  $X = 0, 1, 2$

Función de probabilidad:  $f(0) = P[X = 0] = 1/4$  ;  $f(1) = P[X = 1] = 1/2$  ;  $f(2) = P[X = 2] = 1/4$

$X = n^\circ$ de caras	0	1	2
$P[X = x_i]$	1/4	1/2	1/4

b)  $\mu = E[X] = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2} = 0,7071$$

36.- Se lanza una moneda 3 veces y contamos el número de caras.

- a) Calcula la función de probabilidad y representa gráficamente.  
b) Calcula la esperanza matemática y desviación típica

(Sol.: a) Variable aleatoria  $X = n^\circ$  de caras  $X = 0, 1, 2, 3$ ,

$E = (C,C,C) (C,C,X) (C,X,C) (X,C,C) (C,X,X) (X,C,X) (X,X,C), (X,X,X)$

Función de probabilidad

$f(0) = P[X = 0] = 1/8$   $f(1) = P[X = 1] = 3 (1/8) = 3/8$   $f(2) = P[X = 2] = 3 (1/8) = 3/8$   $f(3) = P[X = 3] = 1/8$

$X = n^\circ$ de caras	0	1	2	3
$P[X = x_i]$	1/8	3/8	3/8	1/8

b)  $\mu = E[X] = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 12/8 = 1,5$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1,5^2} = 0,866$$

**TEORÍA:** Modelos probabilísticos discretos: Bernoulli. Binomial.

### Ejercicios

**37.-** Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar 4 veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial. (Sol.:  $B(4, 1/6)$ )

**38.-** Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolvemos la bola al recipiente. (Sol.:  $B(3, 2/5)$ )

**39.-** Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de discos buenos fabricados por una máquina que produce un 90 % de discos sin error, al escoger 10 de ellos. (Sol.:  $B(10, 0,9)$ )

**40.-** Compruen si la variable aleatoria que cuenta el número de ases que podemos obtener, al extraer tres cartas una a una sin devolver a la baraja de 40 cartas. (No sigue una distribución binomial)

**41.-** Si se lanza un dado 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 cincos?

(Sol.:  $A =$  "obtener un cinco" (éxito) y  $\bar{A} =$  "no obtener cinco" (fracaso),  $X =$  "nº de cinco" sigue una distribución  $B(10, 1/6)$ )

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,155$$

**42.-** Si lanzamos 8 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 caras? ¿y la probabilidad de obtener al menos 6 caras?

(Sol.:  $P(X = 3 \text{ caras}) = 56/256$ ;  $P(x = \text{al menos } 6 \text{ caras}) = P(X = 6) + P(x = 7) + P(X = 8)$ )

**43.-** En un estudio de venta por catálogo indica que 12 de cada 50 personas que reciben publicidad por correo acaban adquiriendo algunos productos. Se escogen al azar a 10 individuos y se considera la variable que expresa cuántos de ellos han comprado por catálogo.

a) Determina la distribución que sigue la variable.

- b) Halla la función de probabilidad  
c) Calcula la media y la desviación típica de la variable X  
d) Determinar la probabilidad de que dos de los individuos de la muestra compren por catálogo.  
e) Halla la probabilidad de que ninguno de ellos realice compras por catálogo  
f) ¿Cuántas personas de la muestra se espera que compren por catálogo?

(Sol.: a)  $X = \text{“nº de los que compran por catálogo”}$   $B(10; 0,24)$ ; b)  $P(X = t) = \binom{10}{t} \cdot (0,24)^t \cdot (0,76)^{10-t}$ ;  
c)  $\mu = 2,4$ ;  $\sigma = 1,35$ ; d)  $P(X = 2) = 0,2885$ ; e)  $P(X = 0) = 0,06429$ ; f)  $\mu = 2,4$ , como se observa, de esta muestra de diez personas, se espera que un total de dos o tres recurran a este tipo de compra)

44.- Se realiza un examen tipo test que consta de 9 preguntas, cada una de las cuales ofrece 4 posibles respuestas. Si se contestan las 9 preguntas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener 5 aciertos?

**Sol.:** Éxito “pregunta acertada” y fracaso “pregunta fallada”.

$$P(\text{éxito}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Las pruebas son independientes unas de las otras, se trata de una variable discreta que sigue una distribución binomial  $B(9; 0,25)$

**Buscamos en el cuadro  $n = 9$  y la columna de probabilidad  $0,25$ , en esta columna se selecciona el número de éxitos  $r = 5$ , por tanto  $P[X = 5 \text{ éxitos}] = 0,0389$**

45.- En una distribución binomial  $B(9; 0,8)$  halla la probabilidad de obtener 7 éxitos.

(Sol.: como  $p = 0,8$ , no está en la tabla, en lugar de buscar 7 éxitos buscaremos los 2 fracasos,  $q = 1 - 0,8 = 0,2$ , y sí está en la tabla,  $B(9; 0,2)$   $P[X = 2] = 0,3020$ )

46.- Se lanza una moneda al aire 9 veces. Determina la probabilidad de obtener un mayor número de caras que de cruces.

(Sol.:  $X = \text{“obtener cara”}$ ,  $n = 9$  y  $p = 0,5$ , se trata de una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial  $B(9; 0,5)$  Pide que el número de éxitos sea mayor que 4.

$$P[X \geq 4 \text{ caras}] = P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] + P[X = 7] + P[X = 8] + P[X = 9] = 0,5001$$

47.- Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es: de chica 48,5 % y de chico 51,5 %. En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Calcula la probabilidad de que nazcan 7 chicas.

Solución:  $X = \text{“nazca chica “éxito”}$ , binomial  $B(10; 0,485)$   $p = 0,485$   $P[X = 7] = \binom{10}{7} (0,485)^7 (0,515)^3$

48.- Calcular la probabilidad de obtener 3 caras, si lanzamos 5 veces una moneda trucada que tiene el doble de probabilidad de mostrar cara que cruz

(Solución:  $X = \text{nº de caras obtenidas}$ , binomial  $B(5, 2/3)$   $P[X = 3] = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,33$ )

**49.-** El 3% de la población pertenece al grupo sanguíneo B<sup>-</sup>. ¿Qué probabilidad existe de que, al tomar 4 personas al azar, la mitad sea de ese grupo?

(Solución:

$$X = \text{n}^\circ \text{ de personas que sean del grupo B}^-, \text{ binomial } B(4; 0,003) \quad P[X = 2] = \binom{4}{2} (0,03)^2 \cdot (0,97)^2 = 0,0051$$

**50.-** Supongamos que la probabilidad de nacer niño es 0,50. Calcula la probabilidad de que una familia de 6 hijos, sean:

- a) Todos varones    b) Al menos, dos varones    c) Tres varones    d) Calcula la media y la desviación típica

(Sol.: Se trata de una distribución binomial B(6; 1/2), de parámetros n = 6 y p = 1/2

Sea X la variable= n° de hijos varones

a)  $P(X = 6) = \binom{6}{6} (0,5)^6 (0,5)^0 = 0,015625$  (la probabilidad es del 1,56 %)

b)  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (\binom{6}{0} (0,5)^0 (0,5)^6 + \binom{6}{1} (0,5)^1 (0,5)^5) = 1 - 0,109375 = 0,890625$

c)  $P(X = 3) = 0,3125$

d)  $\mu = n \cdot p = 6 \cdot 1/2 = 3$  varones     $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 1,225$

**51.-** En una fábrica de relojes el control de calidad detecta la aparición de un defecto con una probabilidad de 0,1, pero que un reloj sea defectuoso es independiente del hecho de que los otros lo sean o no. Si retiramos 5 relojes al azar, determina la probabilidad de que :

- a) Al menos uno de los relojes sea defectuoso.  
b) Exactamente dos relojes sean defectuosos.

(Sol.: X = n° de relojes defectuosos , B(5; 0,1);

a)  $P[X \geq 1] = 1 - (P[X = 0]) = 1 - \binom{5}{0} (0,1)^0 (0,9)^5$     b)  $P[X = 2] = \binom{5}{2} (0,1)^2 (0,9)^3$

**52.-** La probabilidad de que un cazador novato cobre una pieza es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que cobre una pieza al menos 3 veces.

(Sol.: Sea X = n.º de piezas cobradas por un cazador, p = 0,4 q = 0,6 B(5; 0,4)  $P[X \geq 3] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0,4096$ )

**53.-** Un mensaje es transmitido con errores con probabilidad 0,1. Emitimos de forma independiente 10 mensajes. Calcula la probabilidad de que al menos alguno de los 10 mensajes haya sido transmitido con errores.

(Sol.: Sea X = n.º de mensajes transmitidos con error. B(10; 0,1),  $P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[X = 0] = 0,6125$ )

**54.-** Si el 20 % de las piezas producidas por una maquina son defectuosas, .cual es la probabilidad de que, entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas?

(Sol.:  $X =$  número de piezas defectuosas;  $p = 0,2$  ;  $B(4;0,2)$ ;  $P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0,9728$ )

**55.-** De una urna con 4 bolas blancas y 3 negras se extraen sucesivamente 3 bolas, que se vuelven a introducir en ella después de cada extracción. Dada la variable aleatoria  $n^\circ$  de bolas blancas extraídas, hallar la media y la desviación típica.

(Sol.:  $X = n^\circ$  de bolas blancas, binomial  $B(3, 4/7)$  ;  $E(x) = \mu = n \cdot p = 3 \cdot 4/7 = 1,71$ ;

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3 \cdot 4/7 \cdot 3/7} = 0,86$$

**56.-** La probabilidad de que un avión llegue con retraso a cierto aeropuerto es de 0,012. ¿Qué pronedio de aviones llegará tarde al aeropuerto si en él aterrizan diariamente 1250 aviones? Halla la desviación típica del número de aviones que llegarán tarde. (Sol.:  $E(x) = \mu = 15$ ;  $\sigma = 3,85$ )

**57.-** En una bolsa en la que hay numerosas bolas de distintos colores, el 25% son rojas. ¿Qué probabilidad hay de que al extraer una bola esta sea roja?. Si se extraen sucesivamente 4 bolas, devolviéndolas a la bolsa después de cada extracción, y se define la variable aleatoria  $X = n^\circ$  de bolas rojas obtenidas, calcula  $E(x) = \mu$  y  $\sigma$ . (Sol.:  $P[\text{roja}] = 0,25$ ;  $E(x) = \mu = 1$ ;  $\sigma = 0,87$ ,  $P[X = 2] = 0,2109$ )

**58. PAU** Un tratamiento contra el cancer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide:

- i) Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.
- ii) Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría.
- iii) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

$X =$  «n.º enfermos que experimentan mejoría»,  $X$  variable binomial  $B(5;0,8)$

$n =$  «n.º pacientes a los que se les suministra el tratamiento».

$P =$  «probabilidad de mejoría». Si  $p = 0,8 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$

i)  $P(X = 5) = \binom{5}{5} (0,8)^5 \cdot (0,2)^0 = 0,3277$

ii)  $P(\text{al menos tres no mejoren}) = P(1 \text{ o } 2 \text{ mejoren}) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$   
 $= \binom{5}{0} (0,8)^5 \cdot (0,2)^0 + \binom{5}{1} (0,8)^4 \cdot (0,2)^1 + \binom{5}{2} (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = \mathbf{0,0579}$

iii)  $E[X] = \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,8 = 4$  pacientes)

**59.- PAU** Un alumno hace un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente a dos o mas preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si responde al azar a cada una de las preguntas.

(Sol.:  $X = n^\circ$  de preguntas contestadas correctamente.  $p =$  probabilidad de contestar correctamente  $p = 1/3$

$q = 1 - 1/3 = 2/3$        $n = n^\circ$  de preguntas del examen = 4.       $X$  variable  $B(4, 1/3)$

$$P(\text{aprobar}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(P(X = 0) + P(X = 1)) = 0,4 \quad P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16/81$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 32/81$$

**60.- PAU** Si el 20 % de las tartas elaboradas en una fabrica tienen trazas de nueces, ¿cuál es la probabilidad de que, entre 4 tartas elegidas al azar, a lo sumo 2 contengan trazas de nueces?

(Sol.:  $X$  = número de tartas con trazas de nueces

$p$  = probabilidad de tarta con trazas de nueces = 0,2

$n$  = número de tartas elegidas = 4

$X$  variable  $B(4; 0,2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{4}{0} (0,2)^0 (0,8)^4 + \binom{4}{1} (0,2)^1 (0,8)^3 + \binom{4}{2} (0,2)^2 (0,8)^2 = \mathbf{0,9728}$$

**61.-** En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

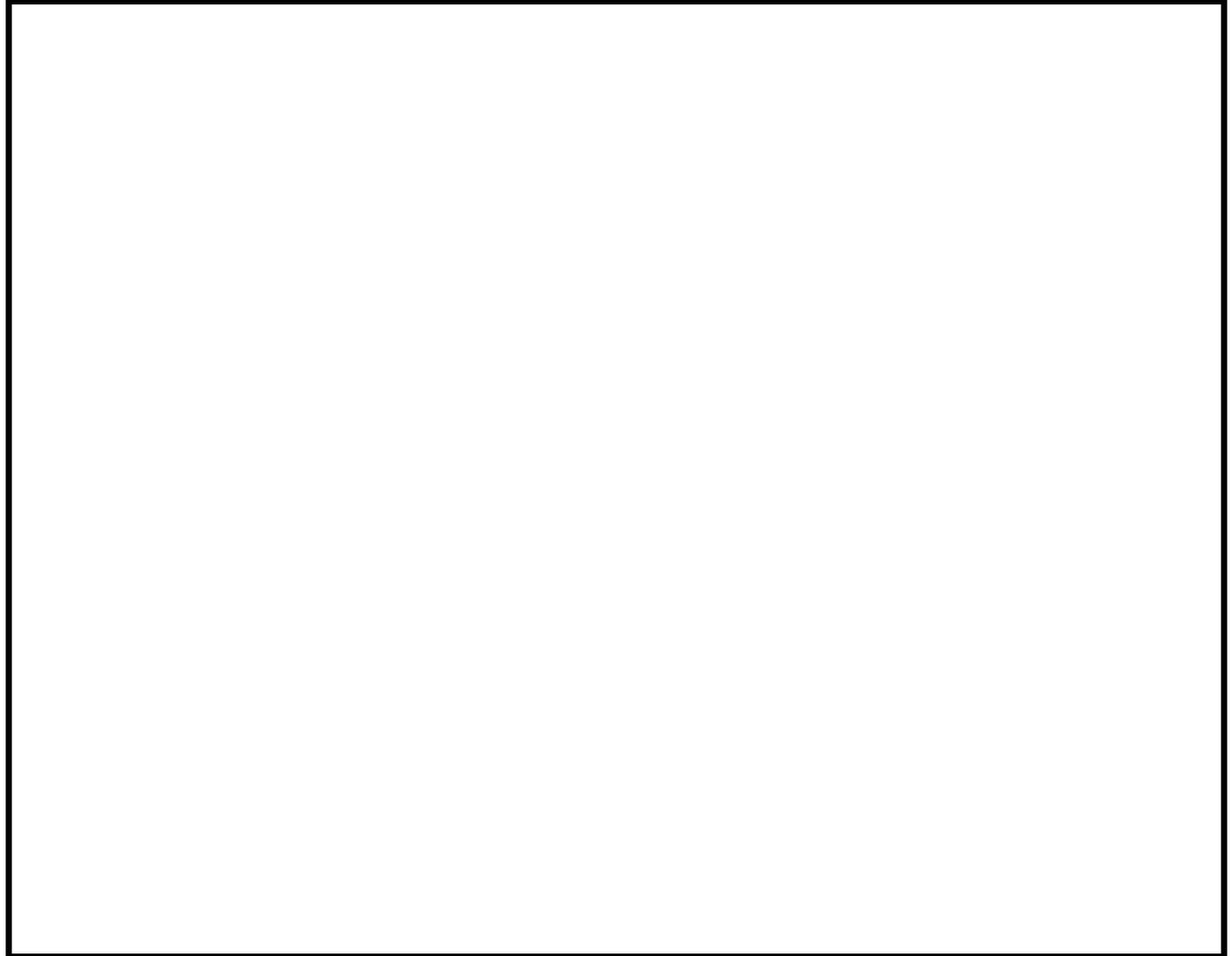
a) Determina la probabilidad de que haya 2 personas a las que la prueba les dé positivo

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de 1 persona? (Sol.:  $X \sim B(10, 0,02)$ ;

$$a) P[X = 2] = \binom{10}{2} (0,02)^2 (0,98)^8 = 0,01531; \quad b) P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1]) = 0,0162$$

**TEORÍA:** Función de probabilidad o densidad de variable aleatoria continua. Función de distribución.

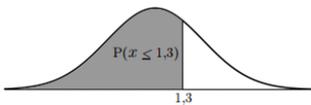
**TEORÍA:** Distribuciones de probabilidad continua: Normal



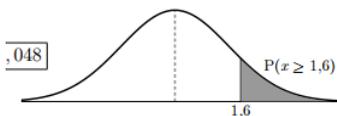
**Ejercicios**

**62.- Ejemplo:** Si  $X$  es una variable  $N(0,1)$ . Calcular:

a)  $P[X \leq 1,3] = 0,9032$



b)  $P[X \geq 1,6] = 1 - P[X \leq 1,6] = 1 - 0,9452 = 0,048$



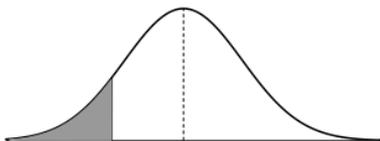
c)  $P[1,4 \leq X \leq 1,6] = P[X \leq 1,6] - P[X \leq 1,4] = 0,9452 - 0,9192 = 0,026$

Tomemos  $a = 1,4$  y  $b = 1,6$ :

$$P(1,4 \leq X \leq 1,6) = \phi(1,6) - \phi(1,4) = 0,9452 - 0,9192 = 0,026$$



d)  $P[X \leq -1,3] = 1 - P[X \leq 1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$



e)  $P[-1,3 \leq X \leq 1,6] = P[X \leq 1,6] - P[X \leq -1,3] = P[X \leq 1,6] - (1 - P[X \leq 1,3]) = 0,9452 - (1 - 0,9032) = 0,9452 - 0,0968 = 0,8484$

f)  $P[Z \geq -1,73] = P[Z \leq 1,73] = 0,9582$

g)  $P[-1,77 \leq Z \leq -0,65] = P(0,65 \leq Z \leq 1,77) = P[Z \leq 1,77] - P[Z \leq 0,65] = 0,9616 - 0,7422 = 0,2194$

63.- Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular las probabilidades.

a)  $P[Z \leq 1]$    b)  $P[Z \leq 2,46]$    c)  $P[Z \geq 1]$    d)  $P[Z \leq -1]$    e)  $P[0,5 < Z < 1,5]$    f)  $P[-1,27 \leq Z \leq 1,66]$

(Sol.: a) 0,8413; b) 0,9931; c) 0,1587; d) 0,1587; e) 0,2417; f) 0,8495)

64.- En la distribución normal  $N(0, 1)$ , calcula el valor de  $k$  en los siguientes casos:

a)  $P[Z \leq k] = 0,7673$    b)  $P[Z \leq k] = 0,9761$    c)  $P[Z \geq k] = 0,1075$    d)  $P[Z \geq k] = 0,0045$

(Sol.: a)  $k = 0,73$ ; b)  $k = 1,98$ ; c)  $k = 1,24$ ; d)  $k = 2,61$ )

### Tipificación de la variable

65- Ciertos estudios demuestran que el consumo de gasolina de los coches es una variable normal con media 7 litros a los 100 kilómetros y una desviación típica 1. ¿Qué porcentaje de coches consumen entre 6 y 8 litros cada 100 kilómetros? Calcula el consumo  $C$  si se sabe que el 30% de los coches tienen un consumo superior a  $C$ .

(Sol.:  $X =$  consumo de gasolina es  $N(7, 1)$ , tipificamos a  $Z$  normal  $N(0,1)$  y hallamos la probabilidad pedida:

$$P(6 \leq Z \leq 8) = P\left(\frac{6-7}{1} \leq Z \leq \frac{8-7}{1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2 P(Z \leq 1) - 1 = 0,6826$$

Hay un 68,26 % de coches que consumen entre 6 y 8 litros.

$P(X > C) = 0,3$ ; tipificando a  $Z$  normal  $N(0,1)$  :

$$P(X > C) = P\left(Z > \frac{C-7}{1}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{C-7}{1}\right) = 0,3; P(Z < C - 7) = 0,7; C - 7 = 0,52; C = 7,52 \text{ litros de consumo por } 100 \text{ kilómetros}$$

66.- PAU Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media de los televisores sigue una distribución normal:

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que un televisor dure entre 9 y 11 años.

(Sol.: a)  $X =$  Duración media de los televisores  $X \sim N(10;0,7)$

$$P(X > 9) = 1 - P(X < 9) = \text{Tipificar} = 1 - P\left(Z < \frac{9-10}{0,7}\right) = 1 - P(Z < -1,42) = 1 - (1 - P(Z < 1,42)) = 0,9222$$

$$b) P(9 < X < 11) = \text{Tipificar} = P\left(\frac{9-10}{0,7} < Z < \frac{11-10}{0,7}\right) = P(-1,42 < Z < 1,42) = P(Z < 1,42) - (1 - P(z < 1,42)) = 0,8444$$

**67.- PAU** Una persona que desea encontrar trabajo se presenta a dos entrevistas en las empresas A y B. En la entrevista de la empresa A obtiene una puntuación de 9, con una media de puntuación de 7 para la totalidad de los candidatos y una varianza de 4. En la entrevista de la empresa B obtiene una puntuación de 8, con una media de puntuación de 6 para la totalidad de los candidatos y una desviación típica de 1,5. ¿En qué entrevista ha obtenido esa persona una mejor puntuación relativa?

(Solución: Por los datos del problema, se supone que la variable «puntuación de los candidatos» se distribuye normalmente en ambas empresas.

$X$  variable  $N(7, 4) = N(7,2)$  ;  $Y$  variable  $N(6;1,5)$

Para contestar en qué caso ha obtenido mejor puntuación, vemos en qué caso hay mayor probabilidad debajo del valor correspondiente.

$$P(X < 9) = \text{Tipificar} = P\left(Z < \frac{9-7}{2}\right) = P(Z < 1) = 0,8413$$

$$P(Y < 8) = \text{Tipificar} = P\left(Z < \frac{8-6}{1,5}\right) = P(Z < 1,33) = 0,9082$$

En la empresa A, está situado sobre un 84,13% de los candidatos. En la empresa B, está situado sobre un 90,82 % de los candidatos. Luego está mejor situado en la empresa B.)

**68.- PAU** En un examen, al que se presentaron 2 000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media 72 y desviación típica 9. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una puntuación entre 60 y 80?

(Sol.:  $X$  variable normal  $N(72; 9)$   $P(60 < X < 80) = \text{Tipificar} = P\left(\frac{60-72}{9} < Z < \frac{80-72}{9}\right) = 0,8106 - 1 + 0,9082 = 0,7188$

La probabilidad de que un estudiante obtenga entre 60 y 80 puntos es 0,7188. Esto quiere decir que, entre los 2 000 estudiantes:  $2000 \cdot 0,7188 = 1437,6 \approx 1438$  estudiantes obtienen una puntuación entre 60 y 80.

**69.- PAU** Cierta tipo de batería dura un promedio de tres años, con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo que la duración de las baterías es una variable normal. ¿Que porcentajes de las baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?

(Sol.:  $X =$  duración de cierto tipo de batería.  $N(3; 0,5)$   $P[2 < X < 4] = \text{Tipificamos} = P\left[\frac{2-3}{0,5} < Z < \frac{4-3}{0,5}\right] =$

$$= P[-2 < Z < 2] = P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$$

El 95% de las baterías duran entre 2 y 4 años.)









