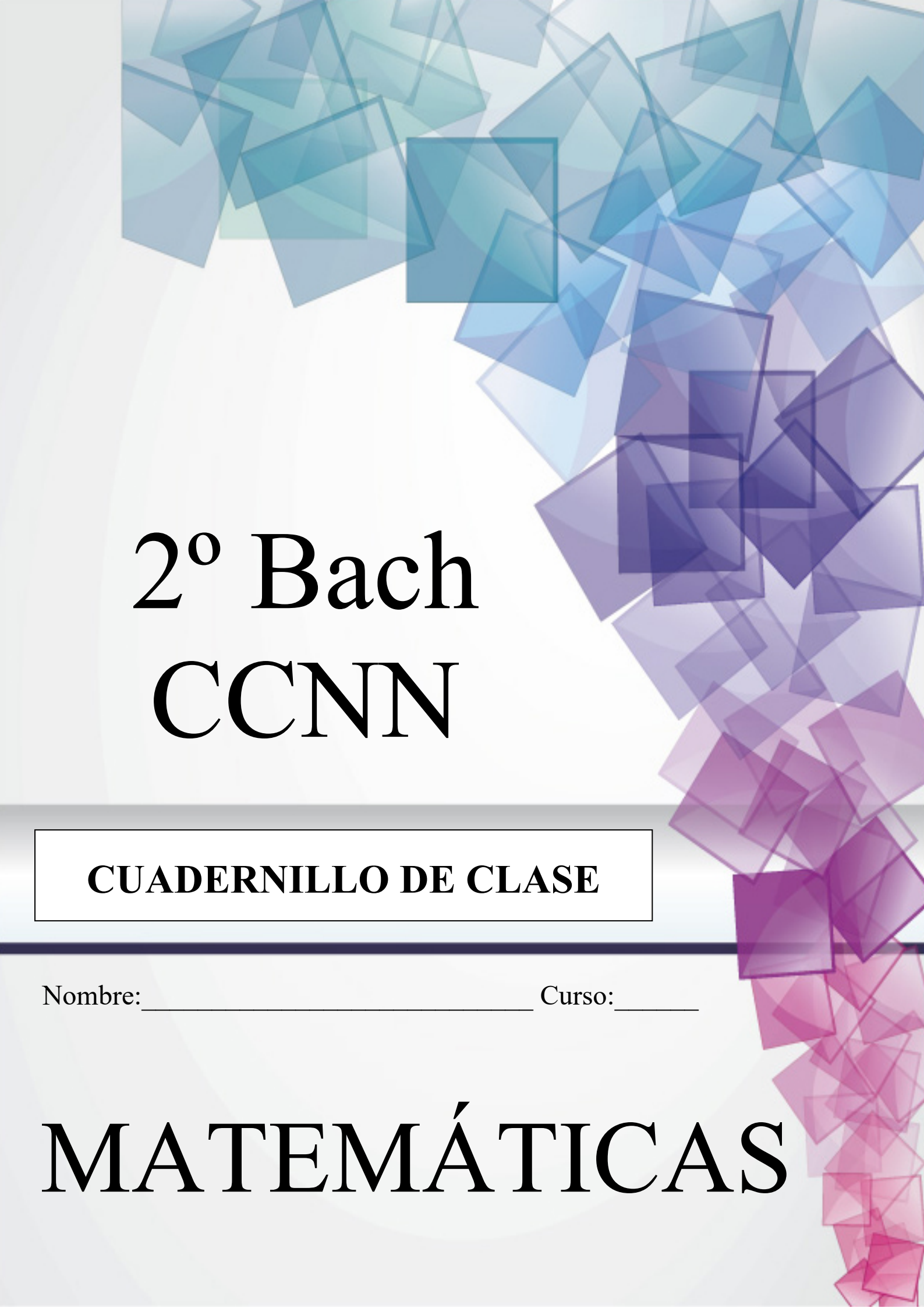




2º Bach CCNN

CUADERNILLO DE CLASE

Nombre: _____ Curso: _____

MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Está permitido copiar y fotocopiar esta obra, total o parcialmente, con el objetivo de que sea accesible para el alumnado.



Reconocimiento (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.



No Comercial (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.



Compartir Igual (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas



Reconocimiento – NoComercial – SinObraDerivada (by-nc-nd): No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

Profesor:

.....

Materiales utilizados:

Material organizado y estructurado por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz) basado a partir del material proporcionado por D. Jose Luis Hernández Quintanilla (IES Melchor de Macanaz)

UNIDADES DEL CURSO:

UNIDAD 1. LÍMITES. CONTINUIDAD.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 2. DERIVADAS.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 3. INTEGRAL INDEFINIDA. INTEGRAL DEFINIDA.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 4. MATRICES. DETERMINANTES.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 5. SISTEMAS DE ECUACIONES.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 6. VECTORES. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 7. PROBLEMAS MÉTRICOS.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 8. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		<u>Comentario:</u>	<u>Nota Unidad</u>
INFORMÁTICA		EXAMEN			

Unidad 1. Límites. Continuidad.

Esquema de repaso:

1. Definición de función. Dominio. Recorrido.

Una función real de variable real ($f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) es una correspondencia que asocia a cada valor de un subconjunto de $\mathbb{R}$ (llamado dominio) un único valor de otro subconjunto de $\mathbb{R}$ (llamado conjunto imagen o recorrido)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

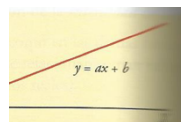
La primera magnitud x es la variable independiente y la segunda “ y ” la variable dependiente.

Dominio f = $\text{Dom}(f) = D = \{\text{conjunto de valores de } x \text{ para los que está definida la función}\}$

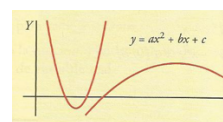
Recorrido f = $\text{Rec}(f) = \{\text{conjunto de valores reales que son imagen de los valores del dominio}\}$

2. Funciones elementales.

Lineales



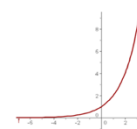
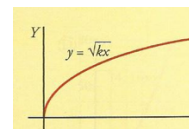
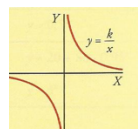
Cuadráticas



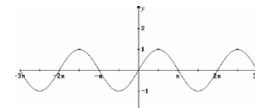
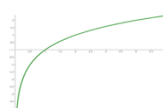
Polinómicas

$x, x^2, x^3, \dots$

Racionales (P/Q) Radicales $\sqrt[n]{P}$ Exponencial (2^x)



Logarítmica Trigonómicas ($\sin(x), \cos(x), \dots$)



3. Dominio de funciones elementales

Funciones	Dominios
Polinómicas $P(x)$ Exponenciales (2^x) $\sin(x), \cos(x)$	$\mathbb{R}$
Racionales $P(x)/Q(x)$	$\mathbb{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$
Radicales $\sqrt[n]{Q(x)}$	Estudiar la inecuación $Q(x) \geq 0$
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	Estudiar la inecuación $Q(x) > 0$

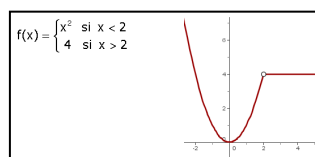
4. Cálculo del recorrido.

Recorrido f = Dominio de la inversa de $f = \text{Dom } f^{-1}$

Para calcular la inversa f^{-1}

Dada $y=f(x)$, escribir $x=f(y)$ y despejar “ y ”.

5. Funciones definidas a trozos. Valor absoluto.



Son funciones divididas en varios intervalos. Hay que saber representarlas. En particular las función $|f(x)|$

$|f(x)|$ se representa resolviendo $f(x)=0$ y expresando como una función a trozos de intervalos con valor $f(x)$ cuando es $f(x)>0$ y $-f(x)$ cuando $f(x)<0$.

6. Idea intuitiva de límite. Límites laterales.

Un número real, L , es el límite de una función, f , en el punto “ a ” si al tomar valores de x suficientemente próximos a “ a ” (distintos de a), sus imágenes, $f(x)$, están tan próximas a L como queramos. Se designa por: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Límites laterales. Podemos aproximarnos a un valor “ a ” por la izq, con valores menores que él, o por la derecha, con valores mayores.

Izq $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$; Dcha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Para que exista el límite ambos límites han de coincidir.

7. Propiedades de los límites.

- $\lim (f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$
- $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim k \cdot g(x) = k \cdot \lim g(x)$
- Si $\lim g(x) > 0$, $\lim f(x)/g(x) = \lim f(x)/\lim g(x)$
- Si $g(x)$ es potencial, exponencial, logarítmica o trigonométrica $\rightarrow \lim g(f(x)) = g(\lim f(x))$
- $\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)}$

8. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \neq \infty$	Se dice que hay una asíntota horizontal en $y=c$.
Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios	(1) Si Grado P > Grado Q $\rightarrow$ Tiende a $\pm \infty$. Para saber el signo sustituir por un número grande para ver el signo. (2) Si Grado P < Grado Q $\rightarrow$ Tiende a 0. (3) Si Grado P = Grado Q $\rightarrow$ Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado. https://youtu.be/icZDdqfHAUo
Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, con g y h funciones	- Si g(x) crece más rápido que h(x) tiende a ∞ y si es al revés tiende a 0. - Orden de crecimiento de algunas funciones: $\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$
$\infty - \infty$	- Resolver la expresión si se puede (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$) - Si es la diferencia de dos funciones, dependerá del orden de cada una. - Si hay raíces y los grados son los mismos multiplicar por el conjugado numerador y denominador (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$). https://youtu.be/XSfUKZbvpE
a^∞ , con $a \neq 1$	- Si $a > 1$ tiende a ∞ y si $0 < a < 1$ tiende a 0.
1^∞	- Resolverlo usando que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$ https://youtu.be/39Q1ZwI9cFY
$\frac{0}{0}$	- Resolver para convertirlo en otro tipo de indeterminación. (Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} : \frac{1}{x+1}$).

9. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow -\infty$

Usar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ <https://youtu.be/bQVo28zy27k>

10. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow a$

$\frac{k}{0}$, con $k \neq 0$	-Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen $+$ ó $-$ infinito. Izq $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$; Dcha $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ -Hay una asíntota vertical en $x=a$. https://youtu.be/yoAPeT7_mq8
$\frac{0}{0}$	-Descomponer numerador y denominador para simplificar. https://youtu.be/UtB_d6ZS_wg -Si aparecen raíces, multiplicar arriba y abajo por el conjugado. https://youtu.be/0M6wB158APQ
$\infty - \infty$	-Operar con la función para cambiar de indeterminación. (Ej: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$)
1^∞	-Resolver usando el número “e”.

11. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales. Los candidatos son los puntos que no están en el dominio y los extremos.

A.Vertical en $x=a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0}$ (habrá que estudiar signo por izq y dcha).

Asíntotas horizontales. A.Horizontal en $y=b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Asíntotas oblicua en $y=mx+n$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

La posición de $f(x)$ respecto de la asíntota se averigua mirando el signo de $f(x) - (mx + n)$ para valores grandes de x

12. Definición de función continua en un punto.

Se dice que **una función $f(x)$ es continua** en un punto $x=a$ si y sólo si se cumplen estas 3 condiciones:

- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

13. Definición de función continua en intervalo.

- $f(x)$ es continua en (a,b) si lo es en todos sus puntos.
- $f(x)$ es continua en $[a,b]$ si es continua en (a,b) y es continua por la dcha en “a” y por la izq en “b”.

14. Tipos de discontinuidad.

- **Discontinuidad evitable.** No existe $f(a)$ ó existe pero no coincide con el límite. (Falla 1 o Falla 3)
- **Discontinuidad de salto o de 1ª especie.** (Falla 2)
 - Salto finito: no coinciden los laterales y son finitos.
 - salto infinito: algún límite lateral es infinito.
- **Discontinuidad esencial o de 2ª especie.** Cuando no existe algún límite lateral

15. Continuidad de funciones elementales

Funciones	Continuidad
Polinómicas $P(x)$ Exponenciales (2^x) $\text{Sen}(x)$, $\text{Cos}(x)$	Continua en $\mathbb{R}$
Racionales $P(x)/Q(x)$	Continua en $\mathbb{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	Continua en $Q(x) \geq 0$
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	Continua en $Q(x) > 0$
$\text{Tag}(x)$	Continua salvo en $\frac{\pi}{2} + k\pi$

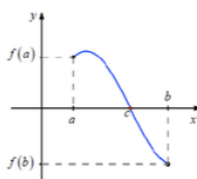
16. Propiedades de continuidad.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el punto $x = a$, por las propiedades de los límites también son continuas en $x = a$ las funciones:

- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $k \cdot f(x)$
- $(f(x))^{g(x)}$ si $f(a) > 0$
- $f(x)/g(x)$ si $g(a) \neq 0$
- $g(f(x))$ si $g(x)$ es continua en $f(a)$

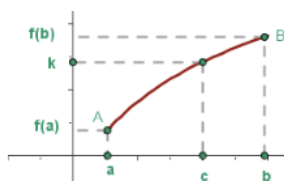
17. Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ (es decir, donde corta al eje OX).



18. Propiedad de los valores intermedios (Teorema de Darboux).

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y n es cualquier número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $k \in (a, b)$ tal que $f(k) = n$.



19. Teorema de la acotación o de los extremos absolutos de Weierstrass.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a, b]$ (y por tanto está acotada). Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a $[a, b]$ donde $f(x)$ alcanza valores extremos absolutos: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ si $x \in [a, b]$

UNIDAD 1. LÍMITES. CONTINUIDAD.

Saberes Tema1. Funciones. Límites. Continuidad	
D2. Modelo matemático	D2.1. Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
D4. Relaciones y funciones	D4.1. Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales. D4.2. Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
B2. Cambio	B2.2. Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.

Estos saberes se concretan en los siguientes contenidos

Concepto de función. Dominio. Concepto de límite de una función en un punto. Cálculo de límites. Límites laterales. Límites infinitos cuando la variable tiende a un número real. Límites finitos en el infinito. Límites infinitos en el infinito. Resolución de indeterminaciones.

Continuidad de una función en un punto. Continuidad en un intervalo cerrado. Continuidad de las funciones elementales. Tipos de discontinuidades. Aplicaciones.

Nota para EvAU: Los teoremas de Bolzano y Weierstrass pueden ser necesarios para el estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones, pero no se preguntará explícitamente el enunciado de un teorema ni su demostración.

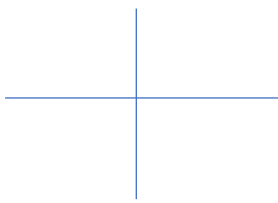
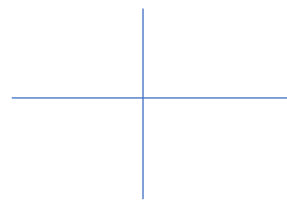
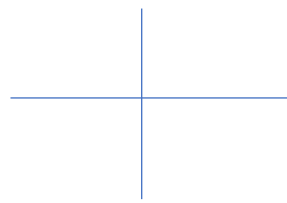
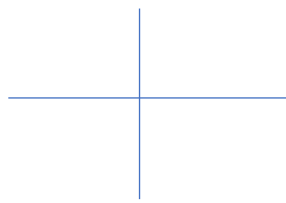
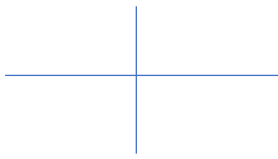
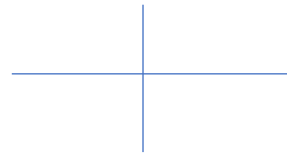
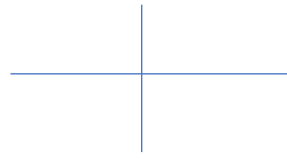
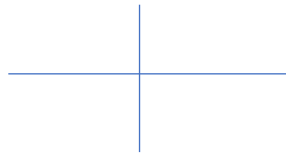
TEORÍA. Definición de función.

	<u>Ejemplo gráfico</u>
--	------------------------

TEORÍA. Dominio de una función.

TEORÍA. Recorrido de una función.

TEORÍA. Funciones elementales.

Lineales $y=ax+b$	Cuadráticas $y=ax^2+bx+c$	Polinómicas $y=P(x)$	Racionales $y=1/x$
			
Dom(f)=	Dom(f)=	Dom(f)=	Dom(f)=
Racionales $y=\sqrt{x}$	Exponenciales $y=2^x$	Logarítmicas $y=\log(x)$	Trigonométricas $y=\sin(x)$
			
Dom(f)=	Dom(f)=	Dom(f)=	Dom(f)=

TEORÍA. Dominio de las funciones elementales.

Funciones	Dominios
Polinómicas (P(x)) // Exponenciales (2^x) Sen(x), Cos(x)	
Racionales $P(x)/Q(x)$	
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	
Logarítmicos $\log_a(Q(x))$	

Ejercicios:

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3$	b) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$	c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$	d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	e) $f(x) = \ln(x-2)$
f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$	g) $h(x) = \ln(x^2-3x+2)$	h) $g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$	i) $p(x) = e^{\frac{1}{x}}$	j) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

(Sol.: a) $D(f) = \mathbb{R}$; $R(f) = [3, +\infty)$ b) $D(f) = [-1, +\infty)$; $R(f) = [2, +\infty)$;
c) $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; $R(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; d) $D(f) = (0, +\infty)$; $R(f) = (0, +\infty)$; e) $D(f) = (2, +\infty)$; $R(f) = \mathbb{R}$;
f) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; g) $D(h) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; $D(h) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; i) $D(p) = \mathbb{R} - \{0\}$; j) $D(h) = (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$)

2. EVAU Junio 2014 1B (parte del ejercicio). Calcula el dominio de las siguientes funciones

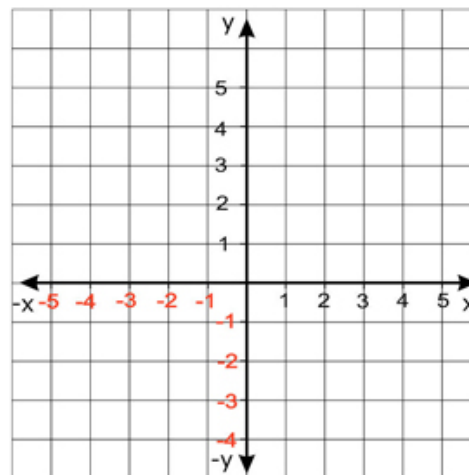
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x-2} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

3. Queremos vallar un campo de fútbol rectangular de 400 m^2 . En dos de los lados paralelos usaremos un material de $200\text{€}/\text{m}$ lineal. En los otros dos lados paralelos usaremos un material de $100\text{€}/\text{m}$. Obtén una función que describa el coste total de la valla en función de uno de los lados. ¿Cuál es el dominio de esa función?

TEORÍA. Funciones a trozos.

Representa gráficamente e indica el dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \leq x < 2 \\ 3 & x \geq 2 \end{cases}$$



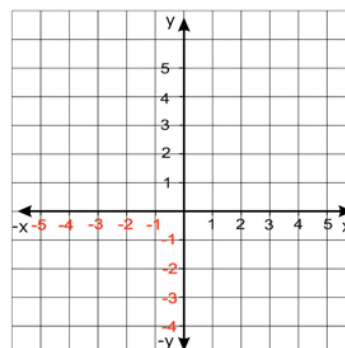
4. EVAU Junio 2020/21 (parte del ejercicio). Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & x > 3 \end{cases}$, determina

razonadamente su dominio.

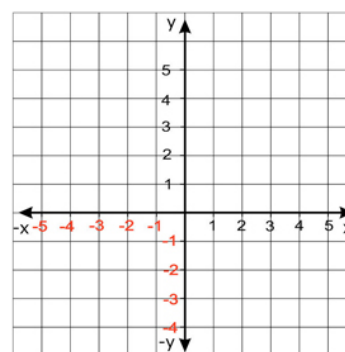
TEORÍA. Función valor absoluto.

Expresa como una función a trozos y representa gráficamente:

a) $f(x) = |x+1|$



b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$



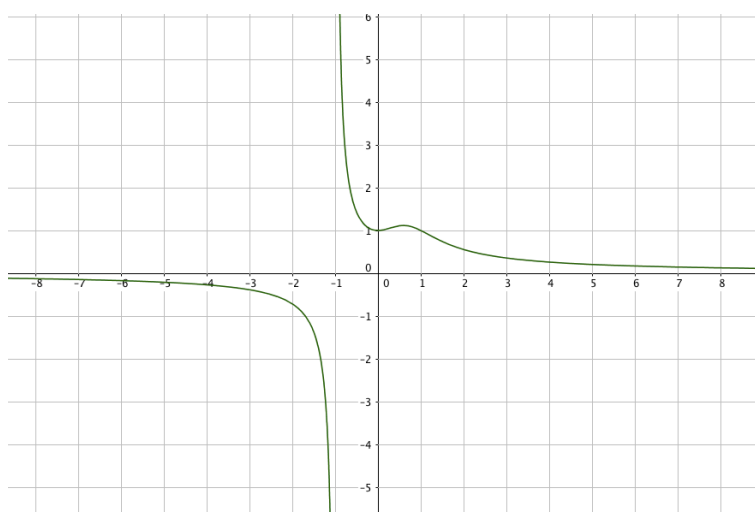
Ejercicios:

5. Expresa como una función a trozos la función $f(x) = \frac{x+2}{|x-5|}$

TEORÍA. Idea intuitiva de límite. Límites laterales

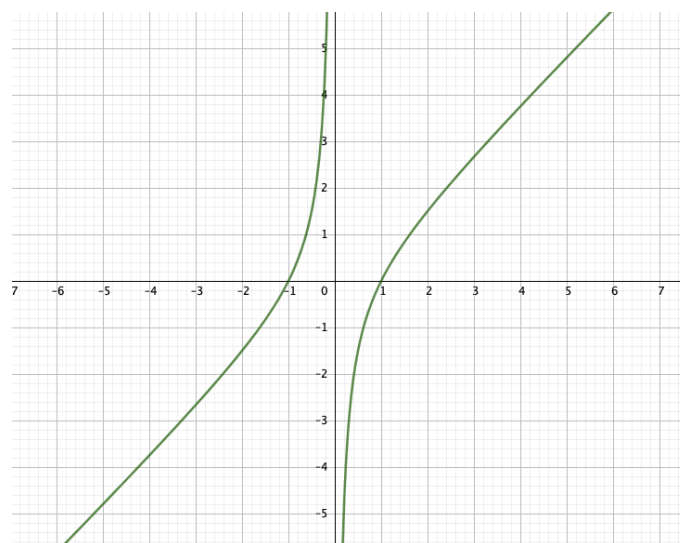
Ejercicios:

6. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



- a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$ b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

7. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

8. Estudia el dominio y calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que se indican. En el caso de funciones a trozos represéntalas además gráficamente.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \text{ en } x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ 2^x & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \text{ en } x = -1$

c) $f(x) = x^3 - 2 \text{ en } x = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x = 0$

9. Define la función $f(x) = |x^2 - 4|$ y calcula el límite cuando x tiende a “2” y cuando x tiende a “-2”.

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ ax + 3 & 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & 2 < x \end{cases}$ calcula los valores “a” y “b” para que existan los límites en $x=1$ y $x=2$.

TEORÍA. Propiedades de los límites.

Cálculo de límites cuando $x \rightarrow \infty$

TEORÍA. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

TEORÍA. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

TEORÍA. Asíntota horizontal. $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L)$

TEORÍA. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow -\infty$

Ejercicios

11. Calcula el límite de las siguientes funciones y representa el resultado:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1}$

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - x^2$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - x^2$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x + 1$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 2x + 1$

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 3}{-x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x - 1}{6x^2 + 5x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 3x}{x^3 - 2x + 1}$

14. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2 - 6x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x+5}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt{2x^2 + 5}}$

15. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$

16. Calcula el valor de k de forma que sea cierto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx^2 - 7x + 5}{7x^2 - 3} = -1$$

TEORÍA. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty - \infty$ (Indeterminación)

Caso 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$

Caso 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x - \ln(x)$

Caso 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$

Ejercicios

17. Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x - x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x - e^x$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-5x}{x} - x \right)$

18. **EVAU Reserva 2012.** Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

TEORÍA. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a^\infty, 1^\infty$ (Indeterminación)

Ejercicios

19. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{x-3}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^{x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^{x+2}$

20. **EVAU Junio 2022/23.** 6.a) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{x^2}$

21. **EVAU Junio 2021/22.** 2.b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

22. **Reserva Junio 2011 1B.** Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

Cálculo de límites cuando $x \rightarrow a$

TEORÍA. Asíntota vertical. $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0} \right)$

23. Calcula el límite de las funciones en los puntos que se indican. Indica cuáles son asíntotas verticales y representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \frac{2}{x-2}$ en $x=2$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x=0$ c) $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en $x=1$ d) $h(x) = \frac{4}{x^2-4}$ en $x=-2$

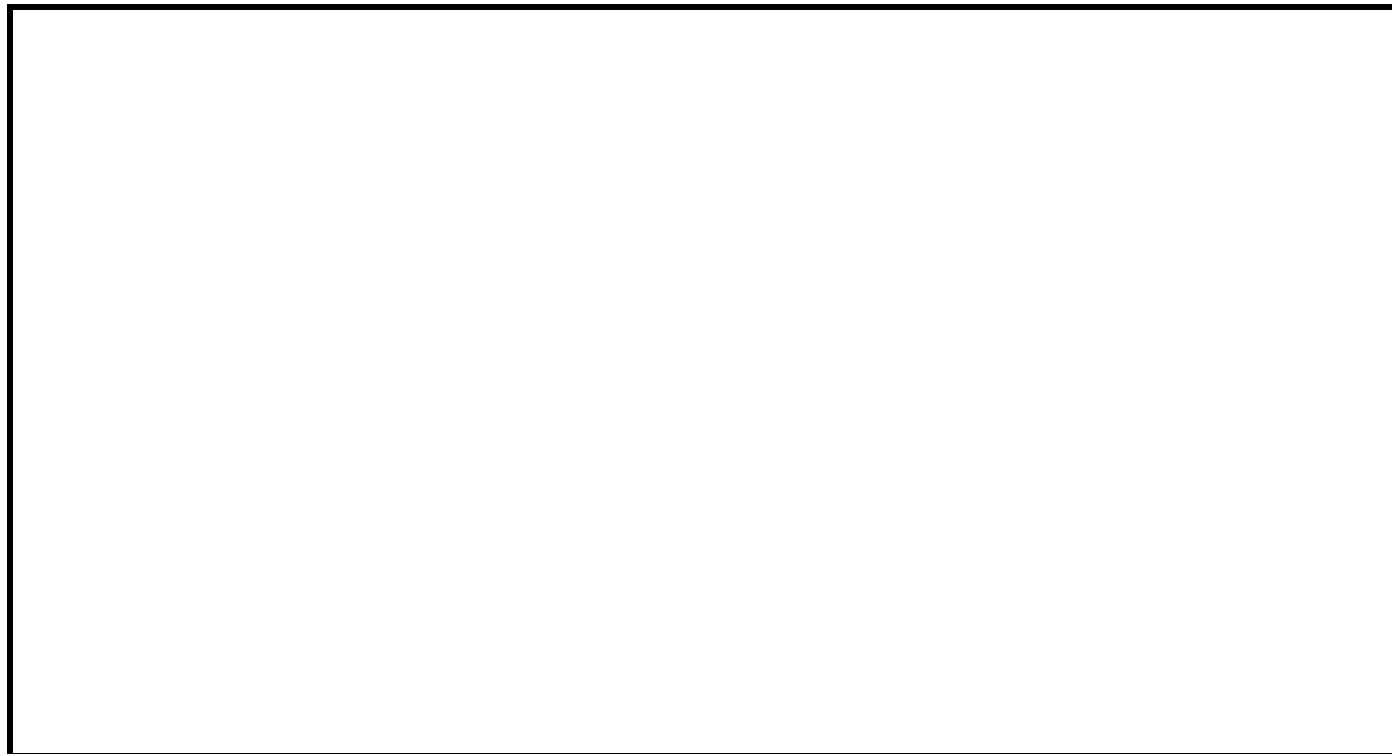
TEORÍA. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

24. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10}$ b) **(PAU Junio 2008)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$

25. **EVAU Julio 2022/23.** 6.a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$

TEORÍA. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.



Ejercicios

26. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ d) $f(x) = e^{x-1}$

27. La distancia entre Hellín y Albacete es de 70 km. Queremos ir y volver en coche. La velocidad media del viaje de ida es de x km/h y la velocidad media de vuelta es de 20 km/h por encima de la velocidad de ida. Encuentra la función que representa el tiempo total tardado en función de la velocidad media de ida x . Estudia sus asíntotas verticales e interpreta su significado.

28. **EVAU Junio 2014 1B.** Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4}$

29. **EVAU Septiembre 2014 1B.** Estudia si tiene asíntotas oblicuas la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

30. **PAEG Septiembre 2009.** Dada $f(x) = \frac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor de “a” para que tenga asíntota horizontal en $y=9$.

31. Sea $f(x) = \frac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$. Determina el valor de “a” para que la recta $x=-1$ sea una asíntota vertical de $f(x)$.

32. La función $f(x) = \frac{px^2+1}{x+1}$ tiene como asíntota oblicua la recta $y=-2x+2$. Determina el valor de “p” y estudia si la función corta a dicha asíntota oblicua para ese valor de “p”.

TEORÍA. Continuidad de una función en un punto.

TEORÍA. Continuidad de una función en intervalo (a,b) y [a,b].

TEORÍA. Continuidad de funciones elementales

Funciones	Continuidad
Polinómicas $P(x)$	
Racionales $P(x)/Q(x)$	
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	
Logaritmos $\log_a(Q(x))$	
Exponenciales (2^x) // Sen(x), Cos(x)	
Tan(x)	

Ejercicios

33. Analiza en $x = 2$ la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

34. **Modelo 1 – Curso 2023/24.** Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro a .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ e^{x-2} & x \geq 1 \end{cases}$$

35. Julio 2021/22

3. a) [1,5 puntos] Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \left(2e^{x^2-4} - 8x + 14 \right) / (x^2 - 2x)$$

36. Julio 2021/22

2. a) [1,5 puntos] Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax + 1}{2x + b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \rightarrow +\infty$.

37. Junio 2020/21

7. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

38. Julio 2020/21

5. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

39. Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente resulte continua en todos los

puntos. $f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{si } x < -1 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -bx^3 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$ (Canarias-Junio 2003). (Sol.: $a = -2$; $b = \frac{1}{2}$)

TEORÍA. Propiedades de las funciones continuas en un punto.

TEORÍA. Teorema de Bolzano.



40. Verificar si la función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Sol: No se cumple})$$

41. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real en $[0, 3]$

Sol.: La función $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0, 3]$. Como además $f(0) = 3 > 0$ y $f(3) < 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 3) : f(c) = 0$, esto es, $e^{-c} + 2 - c = 0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

42. Tenemos una función $G(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3}{2x - 1}$ que representa los gastos de una empresa en función del tiempo en años. Demuestra que el gasto va a ser nulo en algún momento entre el primer y el tercer año.

43. La altura de una partícula en movimiento viene dada por la función $M(x) = x^7 + x + 2$. Demuestra que esa partícula alcanza una altura nula en algún momento en el intervalo $[-2, 2]$.

44. ¿Puedes afirmar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$?

45. Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en un punto $x > 0$.

(Castilla y León. Junio 2004.) (Sol.: Existe $c \in (0, 5; 1)$, tal que $h(c) = 0$.)

TEORÍA. Propiedad de los valores intermedios (Teorema de Darboux).

Ejemplo : Dada la función $f(x) = x^3 - 5x + 5$. ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor 4 en algún punto del intervalo $[0, 2]$? ¿Y el valor 2?

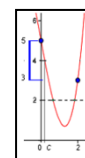
(Sol.: Como la función es continua y en los extremos del intervalo toma los valores $f(0) = 5$ y $f(2) = 3$, se deduce que toma todos los valores entre 3 y 5; en particular, el valor 4. Esto es, existirá algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 4$. Como 2 no está entre 3 y 5, no puede afirmarse que la función tome ese valor para algún punto del intervalo $(0, 2)$; pero tampoco puede afirmarse que no lo tome. (De hecho, hay dos valores que toman el valor 2).

Ejercicios

46. Probar que la función $f(x) = x(\sin x + 1)$ toma el valor 2, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(Sol.: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser el producto de dos funciones continuas.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = 0 < 2$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \pi > 2$. Por teorema de Darboux, existe un número $k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $f(k) = 2$.)



47. Dada $f(x) = 2 \sin x + 5$ ¿toma el valor 6 en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$? En caso afirmativo, determina $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

TEORÍA. Teorema de la acotación o de los extremos absolutos de Weierstrass.

Ejercicios

48. Estudiar si están acotadas las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Si es así, hallar sus extremos absolutos: a) $f(x) = x^2 + 2$ en $[0, 1]$ b) $f(x) = \frac{2}{x-2}$ en $[1, 3]$ (Sol.: No está acotada)

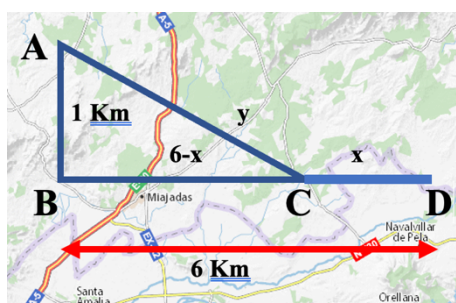
49. El movimiento de un pájaro durante 5 minutos viene dado por la función $f(t) = \begin{cases} t^2 & t < 2 \\ t + 2 & t \geq 2 \end{cases}$

Demuestra que dicho movimiento está acotado entre dos valores en el intervalo de tiempo $[0, 5]$ y calcula cuáles son dichos valores.

Ejercicios propuestos para repasar en casa

Dominios

1. Tenemos el siguiente mapa con cuatro puntos A, B, C y D. Queremos llevar un cable eléctrico desde D hasta A pasando por C. Entre A y B hay 1 km de distancia y entre B y D hay 6 km de distancia. El coste de llevar este cable es de 200€/m entre C y D y de 300€/m entre A y C. Obtén una función que exprese el coste de la instalación desde D hasta A en función de x. ¿Cuál es el dominio de la función?



2. En una empresa en función del dinero en millones de euros que invierten pueden calcular el coste que van a tener en la fabricación de un producto mediante la función $C(x) = \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 6x + 8}$. Calcula el dominio. ¿Qué coste tendrán si la inversión fuera de 2 millones de euros?

3. Queremos cercar tres lados de una parcela rectangular con 400 metros de alambre. Expresa el área A de la parcela en función del lado pequeño del rectángulo y calcula el dominio de dicha función.

4. Una línea de tren transporta 2000 pasajeros con un coste de billete de 10€. Según un estudio de la empresa por cada 2€ de aumento en el precio del billete se perderán 100 pasajeros. Mediante una función expresa el número de pasajeros mensuales dependiendo del precio del billete y calcula el dominio teniendo en cuenta que el número de pasajeros debe ser mayor o igual a 0 y el precio del billete mayor o igual a 10€.

5. Una empresa que fabrica microondas tiene unos gastos fijos mensuales de 150000€ y un coste de 75€ por cada unidad de microondas que fabrica.

- Calcula la función que representa los costes mensuales de la empresa.
- Calcula la función de costes medios mensuales y calcula el coste medio de fabricar 10000 microondas.
- Calcula la asíntota horizontal de costes medios e interpreta su valor.

Límites

6. Calcula a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{1 + 4x}$

7. Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{4x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-1}$

8. Calcula el valor de "a" ($a \neq 0$) para que se verifique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right]^{ax} = e^{-5}$$

9. Determina el valor de "a" para que sea cierta esta igualdad

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$$

10. EVAU Junio 2016 1B. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

11. Calcula el valor de “k” para que sea cierta esta igualdad: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{kx^2 - k}{x^2 + 3x + 2} = 4$

Problemas de límites en la vida real

12. El porcentaje de monopatines en alquiler en una ciudad viene dado por la función $P(x) = \frac{300x+120}{3,5x+40}$, donde x representa los años que ha pasado desde 2018 cuando se montó el negocio. Averigua a largo plazo que porcentaje de los monopatines de la ciudad estarán en alquiler.
13. Una determinada bacteria se reproduce cada minuto. El nº de bacterias medidos en millones viene dado por $C(t) = \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^t$, donde t representa el número de minutos que han pasado. ¿Puedes indicar si el número de bacterias tiende a estabilizarse con el tiempo y cuántas habrá?
14. En un pueblo con 3000 habitantes una persona se ha contagiado de un virus. Suponiendo que la propagación se puede modelar con la función $P(t) = \frac{3000}{1+1000 \cdot e^{-0,9t}}$, con $t \geq 0$. a) Calcula el nº de contagiados a los 5 días, b) ¿En cuántos días se contagiarán el 30% o más?, c) ¿Qué pasará a largo plazo?

Asíntotas

15. Determina las asíntotas horizontales de estas funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ b) $g(x) = 2^{1/x^2}$

16. Determina las asíntotas horizontales de estas funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ b) $g(x) = \frac{-x^2-2}{x^2+1}$ c) $h(x) = \frac{x^2-(x+1)^2}{2x-3}$

17. **EVAU Junio 2011 1A.** Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x^2+3x+4}{2x}$

18. Sea $f(x) = \frac{-20x+4}{ax+10}$. Determina el valor de “a” para que la recta $x=2$ sea una asíntota vertical de $f(x)$. Para el valor de “a” obtenido, estudia si tiene una asíntota horizontal.

19. Halla los puntos de corte de la función $f(x) = \frac{2x^3-4x^2}{2x^2-1}$ con su oblicua.

20. Sea $f(x) = \frac{4x^2}{wx^2-3}$. Determina el valor de “w” para que tenga una asíntota horizontal en $y=12$.

Continuidad

21. Junio 2019/20

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

22. Julio 2019/20

3. b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases},$$

donde $\ln$ es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

23. Julio 2018/19

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)

24. El nº de personas infectadas por Covid en un determinado país en función del tiempo viene dada por

$$I(t) = \begin{cases} a \cdot e^{3t} & t < 2 \\ \sqrt{t+7} - \sqrt{t+2} & t \geq 2 \end{cases} \text{ donde "a" es una constante y t el tiempo en años desde el inicio de la}$$

pandemia. Determina el valor de "a" para que la función se continua en $t=2$ y calcula el número de personas infectadas cuando el tiempo tiende a infinito.

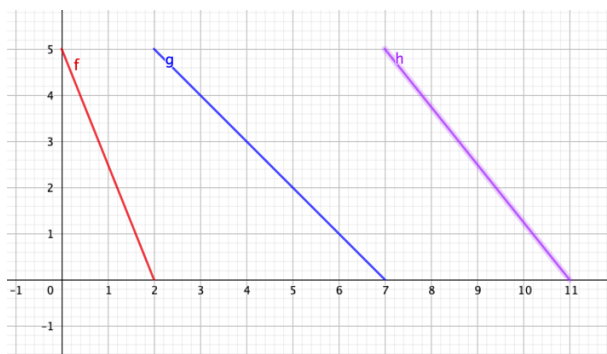
25. Comprueba si la función $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$

26. Define la función $g(x) = |x^2 - 1|$ y estudia la continuidad en $x = -1$ y $x = 1$

27. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

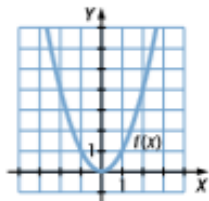
28. La función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x = 0$. Define $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto.

29. La siguiente gráfica nos muestra cómo nos hemos bebido 3 garrafas de 5 litros de agua en los últimos 11 días. Obtén la función a trozos que representa dicha gráfica. Además, estudia los límites laterales y la continuidad de la función.

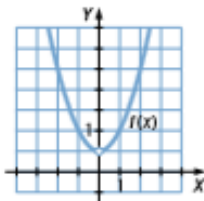


30. Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.

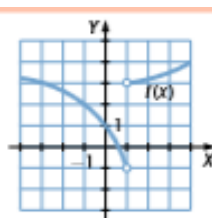
a) En $x = 0$ y $x = 2$



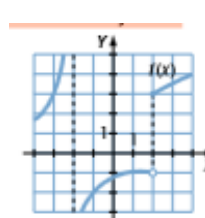
b) En $x = 0$ y $x = 2$.



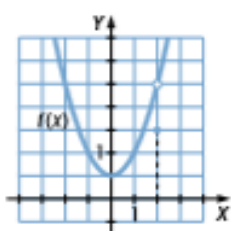
c) En $x = 1$



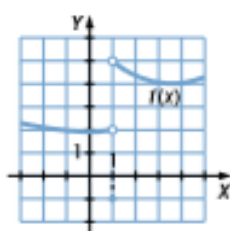
d) En $x = -2$ y $x = 2$



e) En $x = -1$ y $x = 2$



f) En $x = 1$



31. Clasificar las discontinuidades de la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{e^{1-x^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

32. Calcula a y b para que sea continua la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{Halla } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

33. Para cualquier valor de a , se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin ax & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } x \geq \pi \end{cases} \quad \text{Determina los valores de } a \text{ para los cuales } f(x) \text{ es continua en todo } \mathbb{R}.$$

34. Estudia la continuidad de las funciones:

$$a) f(x) = 2^{\sqrt{x-1}} \quad b) g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad c) h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x} \quad d) p(x) = \ln(x^2 - 1)$$

35. Determina para qué valores del parámetro " a " son continuas en todo $\mathbb{R}$ las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - x - e & \text{si } x \leq 1 \\ e^{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Teorema de Bolzano

36. Tenemos una nave espacial que describe una trayectoria dada por la función $f(x) = \ln(x)$ y un cohete que se mueve con trayectoria $g(x) = e^{-x}$. Demuestra que la nave espacial y el cohete se encontrarán en algún punto.

37. El beneficio de una empresa en millones de euros viene dado por la función $B(x) = \sin(x) + 2x$. Demuestra que en algún momento se va a llegar a obtener un beneficio de 1 millón de euros.

38. Junio 2022/23

2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.
b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

39. Modelos propuestos Curso 2022/23

4. a) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza el teorema para demostrar que la función

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x + 2}$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

40. Junio 2017/18

- 1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$. **(1,5 puntos)**

41. Septiembre 2016/17

- 2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

- b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

42. Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna raíz real. Aproxima su valor hasta las décimas.

43. Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$. Probar que existe un punto $c \in [\frac{1}{e^2}, 1]$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Darboux

44. Hemos recorrido 80 km de distancia entre Hellín y Murcia en 1 hora. Demuestra que, aunque durante el trayecto la velocidad habrá variado, hay algún instante de tiempo en el que la velocidad ha tenido que alcanzar los 80 km/h.

Teorema de Weierstrass

45. Aplica el teorema de Weierstrass a la función $f(x) = 8 + 2x - x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$, comprobando si se cumple.

UNIDAD 2. DERIVADAS.

Esquema de repaso:

1. Definición de derivada.

Llamaremos derivada de $f(x)$ en $x=a$ al límite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si ese límite no existiera, entonces $f(x)$ no sería derivable en $x=a$.

2. Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir, $m=f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$.

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

Ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=a$.

$$y-f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \quad \textbf{Interpretación física:}$$

$$v_i(a) = \lim_{t \rightarrow a} VM[t, a] = \lim_{t \rightarrow a} \frac{e(t)-e(a)}{t-a} = e'(t)$$

Reglas para el cálculo de derivadas:

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$	$g(x) = (f(x))^n$	$g'(x) = n (f(x))^{n-1} f'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$g(x) = e^{f(x)}$	$g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$g(x) = a^{f(x)}$	$g'(x) = a^{f(x)} \ln a f'(x)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \ln f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
$f(x) = \log_{a^x}$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$	$g(x) = \log_a f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \log_a e f'(x)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$g(x) = \sin f(x)$	$g'(x) = \cos f(x) f'(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$g(x) = \cos f(x)$	$g'(x) = -\sin f(x) f'(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\sec^2 x}$	$g(x) = \operatorname{tg} f(x)$	$g'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) f'(x)$
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x) = \arcsen f(x)$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x) = \arccos f(x)$	$g'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Operaciones con la derivada

DERIVADA DE LA SUMA:

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN:

$$D(k f(x)) = k \cdot f'(x)$$

PRODUCTO DE FUNCIONES:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

COCIENTE DE FUNCIONES:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

REGLA DE LA CADENA (COMPOSICIÓN DE FUNCIONES):

$$D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3. Derivadas laterales.

Llamaremos derivada por la izq de $f(x)$ en $x=a$

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Llamaremos derivada por la dcha de $f(x)$ en $x=a$

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para que exista $f'(a)$, las derivadas laterales deben existir y tener el mismo valor. Si no es así, si existen y son distintas se dice que la función presenta en $x=a$ un **punto anguloso**. Si existen pero son infinitas se dice que es un **punto de tangente vertical**.

5. Crecimiento y decrecimiento.

$f(x)$ es estrictamente creciente $\rightarrow f'(x) > 0$

$f(x)$ es estrictamente decreciente $\rightarrow f'(x) < 0$

Los valores en que $f'(x)=0$ son candidatos a máximos y mínimos relativos.

Para estudiar el crecimiento de una función $f(x)$:

1. Analizamos la continuidad de $f(x)$
2. Calculamos $f'(x)=0$ para obtener candidatos a máximos o mínimos relativos.
3. Estudiamos el signo de $f'(x)$ con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

7. Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y que verifica que $f(a) = f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretación: Existe al menos un punto cuya recta tangente tiene pendiente 0 y por tanto es paralela al eje OX.

10. Problemas de optimización

4. Relación continuidad y derivabilidad.

$f(x)$ derivable en $x=a \rightarrow f(x)$ es continua en $x=a$

(por lo tanto, las funciones que no son continuas no son derivables).

Al revés no es cierto, se pueden encontrar funciones continuas que no son derivables.

Ejemplo: $f(x)=|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

6. Curvatura de una función.

Si $f(x)$ es una función que tiene $f'(x)$, entonces:

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cup$) (cóncava hacia abajo)

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa ($\cap$) (cóncava hacia arriba)

Los valores en que $f'(x)=0$ son candidatos a Puntos de Inflexión.

Para estudiar la curvatura de una función $f(x)$:

1. Analizamos la continuidad de $f(x)$
2. Calculamos $f'(x)=0$ para obtener candidatos a puntos de inflexión.
3. Estudiamos el signo de $f'(x)$ con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

8. Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación: Existe un punto cuya tangente a $f(x)$ es paralela a la de la recta que une $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

9. Regla de L'Hopital.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y derivables en un entorno del punto $x = a$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Saberes Tema 2. Derivadas.

D2. Modelo matemático	D2.1. Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
D4. Relaciones y funciones	D4.1. Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales. D4.2. Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
B2. Cambio	B2.1. Derivadas: interpretación y aplicación al cálculo de límites. B2.2. Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones. B2.3. La derivada como razón de cambio en la resolución de problemas de optimización en contextos diversos.

Estos saberes se concretan en los siguientes contenidos

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica del concepto de derivada. Recta tangente y recta normal. Derivadas laterales. Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. Continuidad de las funciones derivables. Derivadas sucesivas.

Aplicaciones de las derivadas al estudio de las propiedades locales de una función. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos. Extremos absolutos. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Regla de L'Hôpital. Problemas de optimización.

Nota 1: Los teoremas de Bolzano, Weierstrass, Rolle, valor medio de Lagrange, fundamental del cálculo integral y teorema del valor medio del cálculo integral pueden ser necesarios para el estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones, pero no se preguntará explícitamente el enunciado de un teorema ni su demostración.

TEORÍA: Definición de derivada. Interpretación física de la derivada (velocidad media e instantánea).

Ejercicios

1. Utiliza la definición para calcular la función derivada de: a) $f(x) = 5x - x^2$, b) $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. **Interpretación física de la derivada.** Un cañón dispara una pelota hacia arriba. La altura de la pelota viene dada por la función $e(t) = -8t^2 + 24t + 80$, $t \geq 0$. Calcula la velocidad instantánea de la pelota a los 2 segundos de lanzarla y la velocidad instantánea cuando cae al suelo.

3. El movimiento de una nave respecto al tiempo (medido en días) a lo largo de un eje de coordenadas viene dado por la función $p(t)=4\sin(t)-2t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿En qué instante está la nave en reposo?

4. Consideramos que el espacio recorrido por un móvil en t horas viene dado por $e(t) = \begin{cases} 80t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 60t + 60 & \text{si } 3 < t \leq 6 \end{cases}$

a) Calcular la velocidad media a la que el móvil ha viajado entre la 1ª y 5ª hora.

b) Halla la velocidad en el instante $t = 2$ h. (Solución: a) $v_m = 70$ km/h; b) $v_i = 80$ km/h)

TEORÍA: Tabla para el cálculo de derivadas

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
$f(x) = K$	$f'(x) =$		
$f(x) = x$	$f'(x) =$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) =$	$g(x) = (f(x))^n$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) =$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) =$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) =$	$g(x) = e^{f(x)}$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) =$	$g(x) = a^{f(x)}$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) =$	$g(x) = \ln f(x)$	
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) =$	$g(x) = \log_a f(x)$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) =$	$g(x) = \sin f(x)$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) =$	$g(x) = \cos f(x)$	
$f(x) = \tan x$	$f'(x) =$	$g(x) = \tan f(x)$	
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) =$	$g(x) = \arcsen f(x)$	
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) =$	$g(x) = \arccos f(x)$	
$f(x) = \arctg x$	$f'(x) =$	$g(x) = \arctg f(x)$	

TEORÍA: Derivada de una suma/resta.

TEORÍA: Derivada del producto

TEORÍA: Derivada de un número por una función.

TEORÍA: Derivada de un cociente.

TEORÍA: Regla de la cadena.

Ejercicios

5. Calcula las funciones derivadas de las funciones:

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = (\sin x + 1)^2$ d) $f(x) = x^2 \sin x$ e) $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 2}$
 f) $f(x) = x^2 e^{-x}$ g) $f(x) = 3x \sqrt{x^2 - 1}$ h) $f(x) = 2^x \ln(x + 1)$ k) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$ l) $f(x) = (\tan^2 x + 1) \cos x$

(Sol.: a) $(6x + 9)(x^2 + 3x)^2$; b) $-2x/(x^2 + 4)^2$; c) $\sin 2x + 2 \cos x$; d) $2x \sin x + x^2 \cos x$; e) $(-3x^2 - 2x - 6)/(x^2 - 2)^2$;
 f) $e^{-x}(2x - x^2)$; g) $(6x^2 - 3)/\sqrt{x^2 - 1}$; h) $2^x (\ln 2 \ln(x + 1) + 1/(x + 1))$

6. Calcula la función derivada:

a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ b) $f(x) = \sin x \cos x$ c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
 e) $f(x) = \sin^2 x$ f) $f(x) = \arctan \frac{x}{3}$ g) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$ h) $f(x) = \tan^2 x^2$
 i) $f(x) = (\arctan x^2)^2$ j) $f(x) = \ln \cos e^x$

(Sol.: a) $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$; b) $f'(x) = \cos 2x$; c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$; d) $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; e) $f'(x) = \sin 2x$
 f) $f'(x) = \frac{3}{9 + x^2}$; g) $f'(x) = \frac{1}{2x \ln 2}$; h) $f'(x) = \frac{4x \tan x^2}{\cos^2 x^2}$; i) $f'(x) = \frac{4x \arctan x^2}{1 + x^4}$; j) $f'(x) = -e^x \tan e^x$)

TEORÍA: Derivadas laterales. Condición para que $f(x)$ sea derivable.

TEORÍA: Relación de continuidad y derivabilidad.

Ejercicios

7. Determina, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto que se indica:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 2-x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \text{ en el punto de abscisa } x = 1 \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x = 2$$

(Sol.: a) $f'(1) = -1$; b) No es continua en $x = 2$, no existe la derivada en dicho punto)

8. Determina si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$

(Sol.: No es derivable en $x = -1$ y $x = 1$)

9. Calcular el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 2$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } a = 3 \text{ } f(x) \text{ es derivable en } x = 2, \text{ y } f'(2) = -1)$$

10. Determinar si es derivable en $x = 2$ esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } f(x) \text{ es continua en } x = 2, \text{ pero no es derivable.})$$

11. Junio 2020/21

b) [1,5 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

12. Una empresa de fórmula 1 está diseñando una pista para el próximo campeonato del mundo. Quiere diseñar una curva parabólica que acabe en una recta. La función que describe la forma de la pista viene dada por: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + ax + 14 & x \leq 2 \\ -8x + b & x > 2 \end{cases}$. Determina “a” y “b” para que la función sea continua y derivable.

13. **Junio 2018/19**

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

14. **JUNIO-2014-1A**

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad \text{es continua y derivable en } x = 0 \quad (1, 5 \text{ puntos})$$

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ (1 punto) (Sol.: a) $b = -2, a = 1$; b) $y = 1 - 2x$)

15. Calcula a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } a = 7/2; b = 4)$$

16. **Madrid 2023 – Opción A**

Problema 23.1.2 (2,5 puntos) Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{xe - e}{e^x - e} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4x - 3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

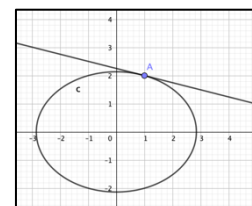
- (1 punto) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.
- (0,5 puntos) Para la función $g(x) = (e^x - e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

17. **Extremadura. Junio 2007.** Dada la función $h(x) = e^{\sin[f(x)]}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. (Sol.: $h'(0) = 1$)

TEORÍA: Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente y normal a $f(x)$ en $x=a$.

Ejercicios

18. Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4. (Sol.: (3, 3))
19. Averiguar en qué punto la tangente a la curva de la función $f(x) = 1/x$ tiene pendiente - 4, y escribir su ecuación. (Sol.: $a = \pm 1/2$; $y = -4x + 4$; $y = -4x - 4$);
20. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$.
21. Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.
22. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, en el punto de abscisa $x = 1$
23. En un videojuego de guerra, un tanque describe una trayectoria en forma de elipse ecuación $9x^2 + 16y^2 = 73$. El tanque realiza disparos a lo largo de las rectas tangentes a su trayectoria. Si el tanque hace un disparo cuando está situado en el punto $P(1,2)$, ¿en qué coordenadas del eje Y impactará?



24. Junio 2020/21

6. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

25. Junio 2017/18.

- c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. (1 punto)

26. Averigua para que valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$. Escribe la ecuación de esta recta tangente. (Sol.: $y = x + \ln 2 - 1$);

TEORÍA: Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Ejercicios

27. **Junio 2022/23.** Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

28. **Junio 2024/25**

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t + 1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

- [1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.
- [1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

29. Razona por qué la gráfica de la función $f(x) = 3x - \sin x$ no puede tener extremos relativos.

30. **Julio 2020/21**

1. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$.

- [1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- [1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

31. **Junio 2019/20**

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

- [1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- [1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

TEORÍA: Curvatura. Puntos de inflexión.

Ejercicios

32. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente: a) $f(x) = -x^2 - x + 4$ b) $g(x) = x^3 - 4x$ c) $h(x) = \ln(x + 1)$ d) $p(x) = 2^{x-1}$

33. Julio 2020/21

7. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

TEORÍA: Teorema de Rolle.

Ejercicios

34. Estudia si es aplicable o no el teorema de Rolle a las funciones que se indican. En caso afirmativo halla los puntos del intervalo cuya derivada se anula.

a) $f(x) = |x^2 - 1|$ en $[-2, 2]$

b) $y = \sin x \cdot \cos x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$

35. Discute si es aplicable el Teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se dan. Si es así, ¿para qué valores de c se cumple la tesis?:

$f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$ b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1, 1]$ c) $f(x) = x - \sqrt{x}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $[-4, 4]$

(Sol.: a) Se puede aplicar; b) No se puede; c) Si se puede aplicar; d) Se puede aplicar; $c = 0$; e) Si se puede aplicar, existe un valor donde se cumple $c = 1$))

36. La evolución de la temperatura al poner hielo en un cazo con fuego viene dada por la función $T(t) = t^5 + 5t - 5$ donde t representa el tiempo entre 0 y 2 minutos. Demuestra que sólo se alcanza la temperatura de 0 grados una única vez en el intervalo $[0, 2]$.

37. El movimiento de una partícula viene dado por $e(t) = t^4 - 8t^2$, $-1 \leq t \leq 1$. Demuestra que hay algún valor en dicho intervalo en el que la partícula se para (velocidad 0). ¿En qué momento ocurre eso?.

38. Modelo 2 – Curso 2023/24

7. a) **[1 punto]** Las ganancias (en millones de euros) de una empresa durante el primer año vienen dadas por la función $f(t) = 4 - t(1 - t)e^{t^2}$, donde $t \in [0, 1]$ representa el tiempo en años. Sin calcularlo directamente, justifica que existe un extremo relativo en el período de tiempo $[0, 1]$. ¿Se trata de un ganancia máxima o mínima? ¿Por qué?

39. Julio 2020/21

- b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x \sin(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

40. Junio 2018/19

- b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

41. Julio 2018/19

- 1B.** a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

42. Junio 2017/18

- 1B.** a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**

TEORÍA: Teorema del valor medio de Lagrange o de los incrementos finitos.



Ejercicios

43. Comprueba si la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1, 3]$. En caso afirmativo, determina la derivada que da el teorema y los valores de c correspondientes.

44. Demuestra que existe un punto de abscisa $x = c \in (1, e)$ tal que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 \ln x + 3$ en c es paralela a la recta que pasa por $A(1,3)$ y $B(e, 5)$.

45. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, comprueba si cumple el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$ y, en caso afirmativo, determina el valor cuya existencia garantiza el teorema.

{Sol.: Si, $c = 2/3$ }

46. En un mapa, una carretera describe una trayectoria que viene dada por la función $e(t) = t^3 - 6t^2 + 5$, donde t representa el tiempo en horas en el intervalo $[0,3]$. Demuestra si es posible construir una carretera recta tangente a $e(t)$ que sea paralela a la que recta que une los puntos $(0, f(0))$ y $(3, f(3))$. En caso afirmativo averigua en que puntos.

TEORÍA: Regla de L'Hopital

Ejercicios

47. **Modelo curso 2022/23.** Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{1+x^3}$
48. **Junio 2020/21.** Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4}$
49. **Julio 2020/21.** Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$
50. **Junio 2019/20.** Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$
51. **Julio 2019/20.** Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$
52. **Junio 2018/19 1B.**

Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$

53. **Septiembre 2015 1A.** Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x e^{\sin x}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{x + \sin x}}$ (Sol.: a) 2; b) $e^{1/2}$)

54. Halla los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{3 \sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 - 2x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \ln(x-2)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{2}{x e^x} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)^{1/x}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

Nota: para resolver los límites h, i, j utiliza la estrategia de que $f(x) = e^{\ln(f(x))}$

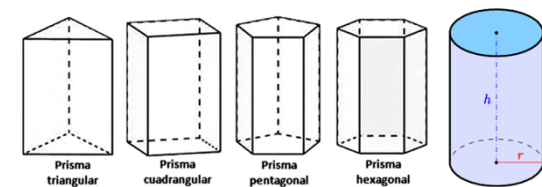
(Sol.: d) 0; e) 0; h) 1; i) 1; j) 1)

55. Calcula utilizando la regla de L'Hôpital: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x \cdot \ln x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{3x^2}$ (Sol.: a) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) 1; f) 3)

Problemas de optimización:

Algunas fórmulas geométricas a repasar para poder hacer problemas de optimización:

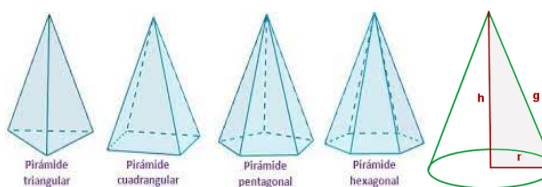


Prismas y cilindro:

Área Prisma = 2 Bases + Área Lateral (rectángulos)

Área Cilindro = 2 Círculos + Rectángulo = $2\pi r^2 + h(2\pi r)$

Volumen Prisma/Cilindro = Área Base · Altura



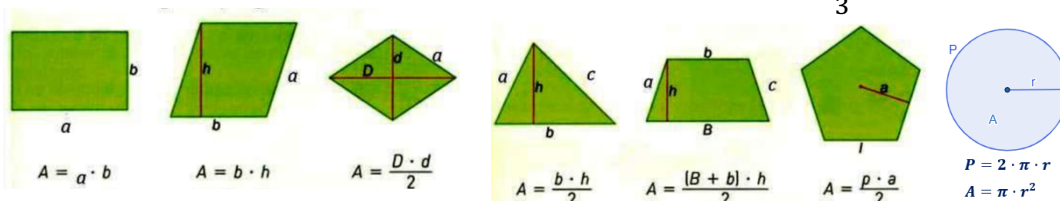
Pirámides y cono:

Área Pirámide = Bases + Área Lateral (triángulos)

Área Cono = Círculo + Sector Círculo = $\pi r^2 + \pi r g$

Volumen Pirámide/Cono = $\frac{\text{Área Base} \cdot \text{Altura}}{3}$

Áreas Básicas



Problemas de optimización conocida la función:

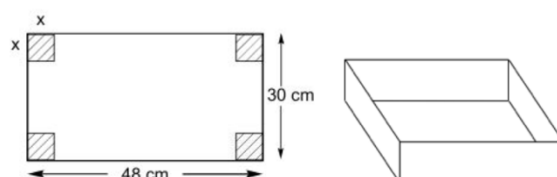
56. Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \frac{300x}{x^3 + 2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?

57. El consumo de un barco que navega a una velocidad de x nudos viene dada por $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$. Calcula la velocidad que es más económica y su consumo. (Sol.: 23,81 nudos y un consumo de 28,35)

Problemas de optimización desconocida la función:

58. Julio 2024/25.

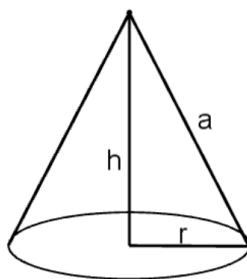
EJERCICIO 1. Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- [0,75 puntos] Determina el volumen de la caja.
- [1 punto] Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.

59. Modelo curso 2022/23.

2. La generatriz (a) de un cono (de altura h y radio r) mide 3 unidades.



- a) **[1,5 puntos]** Encuentra la función $V(h)$ que expresa el volumen del cono en función de su altura h . Recuerda que el volumen del cono es $\pi r^2 h / 3$. Indica el dominio de esta función y justifica que alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho dominio.
- b) **[1 punto]** Halla el valor de la altura que maximiza el volumen.

60. Julio 2019/20

4. a) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

61. Madrid 2023 – Opción B

Problema 23.2.2 (2,5 puntos) Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

- a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.
- b) (0,5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

62. Septiembre 2017/18

- 1B.** a) Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
- b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**

63. Junio 2016/17

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

64. Septiembre 2016/17

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

65. Septiembre 2016

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que: El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado ¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)** (Sol.: Mínimo si $L = 10 \text{ m}$ y $H = 10 \text{ m}$; $P = 60000 \text{ €}$)

66. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

67. De todos los triángulos rectángulos de 5 m de hipotenusa, halla el que tiene área máxima.

(Sol.: El triángulo de área máxima es el que tiene $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m de catetos)

68. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

69. Un depósito abierto de latón de base cuadrada y capacidad para 4 000 l. ¿qué dimensiones debe tener el depósito para que su fabricación sea lo más económica posible?

Ejercicios propuestos para repasar en casa:

Interpretación de la derivada

1. **Interpretación de la derivada aplicada al estudio de costes.** El coste de fabricar “x” chips viene dado por la función $C(x)=0,03x^2+2x+100$, $x \geq 0$.

a) Calcula la tasa de variación media de coste entre fabricar 100 y 200 chips.

b) Calcula el coste marginal (coste instantáneo) de fabricar 100 chips.

Nota: Tasa de variación media de coste de x_1 y x_2 es $TVM = \frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$ y el coste marginal es $C'(x)$. El coste marginal nos indica el coste de fabricar una unidad más de las que estamos fabricando.

2. Supongamos que el nivel del mar (en metros) de una zona costera se puede modelizar por la función $A(t)=4,5 + 1,2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, siendo t las horas empezando desde medianoche. Calcula $A'(5)$ e interpreta el valor obtenido.

3. El número en miles de habitantes de un pueblo interior viene modelizado por la función $N(t)=4e^{-0,3t^2}$, donde t es el tiempo en años y $t=0$ corresponde al año 2010.

a) Calcula el nº de habitantes que había en el año 2010 y en el año 2012.

b) Calcula $N'(2)$ y $N'(4)$ e interpreta que quieren decir esos dos valores.

c) ¿Qué se puede decir sobre lo que va a pasar con la población de este pueblo a largo plazo?. Justifica la respuesta.

4. La propagación de un rumor se puede modelar por la función $R(t)=\frac{100}{1+e^{-2t}}$, donde R(t) es el porcentaje de gente que conoce el rumor en t meses.

a) Calcula como va a evolucionar el porcentaje de gente que conoce el rumor cuando pase mucho tiempo e interpreta el resultado.

b) Determina la tasa de propagación del rumor y determina cuanto valdrá mes 1 y el mes 3. ¿Qué tendencia le ves a la propagación del rumor?.

Cálculo de derivadas

5. Calcular, simplificando el resultado, la derivada de la función: $y = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ (Sol.: $f'(x) = 2/\sin x$)

6. Calcula la función derivada:

a) $f(x) = (\sin x)^x$ b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(Sol.: a) $f'(x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cot x)$; b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$;

7. **La Rioja. Septiembre 2001** Comprueba que es constante la derivada de la función:

$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (Sol.: $f'(x) = \frac{1}{2}$)

Condición de derivabilidad. Continuidad y derivabilidad.

8. Calcula, si existe la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \geq 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(Sol.: No es derivable en $x = 0$. La función tiene un punto anguloso en el punto (0,4))

9. Septiembre 2010

a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + \sin x & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ bx + c & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, determina los parámetros a ; b ; c de $\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea

una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

(Sol.: $a = \frac{1}{2}$; $b = -1/4$; $c = 3/4$)

10. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$ b) $f(x) = |x-1|$ es derivable en los puntos: $x = 3$ y $x = 1$.

11. Demuestra que la siguiente función es continua en el punto $x = 1$, pero no es derivable en él:

$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados?

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

12. Se sabe que la función $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5). Calcula las constantes a y b . (Sol.: $a = -7/2$, $b = 1$)

13. Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Estudia la continuidad y la derivabilidad.

14. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 + \ln(x-1) & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ sea continua y derivable. (Sol.: $a = 1$ y $b = -3$)

15. **Galicia, 2007** Dada la función: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ calcula a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es f derivable en $x = 2$? (Sol.: $f(x)$ continua en $x = 2$ si $a = \frac{1}{2}$; no es derivable en $x = 2$)

16. Calcular el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$:

$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos ax & \text{si } x < 0 \\ \ln(e+x)^a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (Sol.: $a = 1$ y $b = 1/e$)

Ecuación de la recta tangente y normal

17. Julio 2019/20

b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

18. Junio 2013

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{ax^2+bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$.

b) Para esos valores, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x=0$

19. Junio 2003.

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el punto de abscisa $x = 0$ a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$ (Sol.: $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$)

20. Septiembre 2010.

Dada la función $f(x) = \arctg(\sqrt{x-1})$, se pide: a) Calcula y simplifica $f'(x)$

b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal.

21. **Madrid, 2005.** Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje X . (Sol.: $(2, \ln 4)$)

22. Halla el punto de la función $f(x) = \sin x^2$ en que la recta tangente tiene de pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y escribe su ecuación. (Sol.: $x = \sqrt{\pi}$; $y = -2\sqrt{\pi}x + 2\pi$)

23. Junio 2011

Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. (1 punto)

24. **PAU-Canarias, 2008.** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar los valores a, b, c y d para que se cumplan las siguientes condiciones:

1º Que la tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 2)$ sea paralela a la recta $y + 1 = 0$.

2º Que la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = 1$.

25. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, halla a y b para que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas a OX . (Sol.: $a = -9$, $b = 24$)

26. Andalucía 2023 – Opción A

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.
b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

27. ¿En qué punto la recta tangente a $f(x) = x e^x$ es paralela al eje de abscisa?. Escribe la ecuación de la recta tangente en ese punto. (Sol.: $(-1, -e^{-1})$; $y = -1/e$)

28. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina coeficientes a , b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$, y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene pendiente igual a -1 . (Sol.: $a = 1/2$, $b = -2$, $c = 3/2$)

Crecimiento. Extremos relativos.

29. Septiembre 2017/18

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2 e^{-bt}$, donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.

- a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**
b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** **Nota:** A largo plazo se entiende como que $t \rightarrow +\infty$.

30. Junio-2015 1 A

Dada la función $f(x) = e^{\sin x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0, 2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo **(1,5 puntos)** (Sol.: $a = -1$, $b = 1$)
b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. **(1 punto)** (Sol.: $(0, 2)$ mínimo)

31. Junio 2014 1B

a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1 + x^2 e^{-x^2}$ **(1,5 puntos)** b) Calcula las asíntotas de $f(x)$ **(1 punto)**

(Sol.: a) Decreciente $\forall x \in \mathbb{R}/(x < -1) \cup (0 < x < 1)$; Creciente $\forall x \in \mathbb{R}/(-1 < x < 0) \cup (x > 1)$; Mínimo relativo $(-1, (e+1)/e)$ Máximo relativo en $(0, 1)$ Mínimo relativo en $(1, (e+1)/e)$; b) AH $y = 1$)

32. Septiembre 2014 1B

Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

- a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.
b) Estudia si tiene asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow +\infty$ (Sol.: $y = x + \frac{1}{2}$)

33. Septiembre - 2008

Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx) \cdot e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

34. Reserva Septiembre 2009 B.

Dada la función $f(x) = 1/\ln(x)$, donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x ,
a) Determina su dominio y sus asíntotas. b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

35. Reserva 2008

Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $(2, 8)$, tenga un mínimo relativo en $x = \sqrt{3}/3$ y la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tenga pendiente 4. Calcular la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
(Sol.: $a = 2, b = -2, c = -4; x + 4y - 15 = 0$)

36. Dada la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$, calcula a y b para que la función tenga dos extremos relativos, uno en $x = 1$ y otro en $x = 2$, respectivamente. Determina si los extremos son máximos o mínimos.
(Sol.: $a = -9, b = 12; (1, -1)$ máximo relativo y $(2, -2)$ mínimo relativo)

37. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ alcance un mínimo en el punto $(1, 2)$
(Sol.: $a = -2, b = 3$)

38. Estudia los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ c) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

(Sol.: a) Mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = -1$; b) estr. decreciente $(0, 1)$ y $(1, e)$; estr. Creciente $(e, +\infty)$; en $x = e$ tiene un mínimo relativo; c) estric. crec. en $\mathbb{R}$, no tiene extremos)

Curvatura. Puntos de inflexión.

39. Estudia la concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = (x - 3) \cdot e^x$ c) $h(x) = \ln(x^2 - x)$ d) $p(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ e) $f(x) = x^3 + 3x^2$ f) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

40. JUNIO-2016-1A

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3 . (1,25 puntos)

41. PAEG-Junio-2015-2 B

Dada la función $f(x) = (x + 1) e^{2x}$, se pide:

a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$

42. Junio 2008

Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x - a) e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

43. Septiembre- 2008

Dadas las funciones $f(x) = \ln(1 - x^2)$ y $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Determina el dominio de cada una de ellas y estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión

Teorema de Rolle

44. Junio 2016/17

1A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. (1,5 puntos)
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. (1 punto)

45. Junio 2016 1B.

- a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)
b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos) (Sol.: $[-1, 0]$)

46. Reserva 2013 1A.

- a) Enuncia el Teorema de Rolle. (1 punto)
b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. (1,5 puntos)

47. Junio 2006

Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica cada caso por qué no contradice el teorema de Rolle.

- a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$ (Sol.: a) No, no es continua en $x = 0$; b) No es derivable en $x = 0$)

48. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x(x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?(PAU 1994)

49. Demostrar que las ecuaciones siguientes tienen una única solución:

$x^2 = x \cos x - \sin x$

b) $x^5 + 5x + 1 = 0$

50. Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^{-x}$, definidas para $x > 0$, se cortan en un solo punto.

Regla de L'Hopital

51. Andalucía 2025

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Teorema de Lagrange

52. Calcula el valor de a y b para que se pueda aplicar el teorema de Lagrange a la función en el intervalo

$$[0,2]: f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}. \text{ Encuentra el punto/s cuya existencia asegura este teorema.}$$

53. Reserva 2013 1B.

Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y calcula un punto de $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2; 0)$ y $(2; 12)$.

54. Reserva Junio 2004.

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$?

b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, f(0))$, $(3, f(3))$?

55. Determinar qué valores deben tomar a y b para que se le pueda aplicar el teorema del valor medio a la

función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en el intervalo $[-3, 3]$

56. Junio 2010 1ª (Reserva)

Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)

b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2; 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos) (Sol.: a) Máximo $(-2, 110)$, mínimo $(2, -34)$; b) $c = 0$)

57. Reserva 2008

Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo } [-1,3] \text{ (Sol.: } k = -2, p = 1)$$

Regla de L'Hopital

58. Junio 2016/17. Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2\cos(x)}$

59. Septiembre 2013 1A

a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$

b) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Sol.: a) $a = 2$; b) e^3)

60. PAEG Reserva 2013 1B

- a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$
 b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ (Sol.: a) $a = 2$, $a = -2$; b) 1)

61. Septiembre 2012 1A

- a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 sea continua en $x = 0$ (Sol.: a) $a = 2$; b) e^3)
 b) Calcula el límite cuando x tiende a $+\infty$)

62. Junio-2008

Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$ (Sol.: a) -7; b) $e^{\pi-2/\pi}$)

63. Reserva 2008

Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \operatorname{sen} x + 2 \tan g x}{x + \operatorname{sen} x} \quad (\text{Sol.: } k = 10)$$

64. Septiembre 2006

- a) Enuncia la regla de L'Hôpital. b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ (Sol: 1/3)

65. Junio 2003

Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ (Sol.: $L = \frac{1}{2}$)

66. Junio 2002

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$

67. Junio- 2001

Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ (Sol.: $L = \frac{1}{2}$)

68. Reserva PAU (2005) .La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{L(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuánto valen b y c ?

69. Calcula a y b para que la función f(x) cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0,4], y calcula el valor o los valores medios dados por el teorema.

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

70. Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(\cos x)}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{-x})$ (Sol.: a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{2}$; e) 1, f) 0)

Problemas de optimización

71. La función $f(t) = \frac{5t}{t^2 - 5t + 9}$ indica el número de afectados, en centenas, por una determinada enfermedad.

a) ¿Cuál fue el día en el que se registró el máximo número de enfermos?

b) ¿A cuántos ascienden estos? (Sol.: a) El tercer día; b) 500 enfermos)

72. PAEG – Sept.-2015

Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. (Sol.: Trozo1: 72 m L(base) = 18 m)

Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2 .

73. PAEG Septiembre 2013 1B.

a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. (1,5 puntos)

74. PAEG Reserva 2013 1A.

Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. (2,5 puntos)

75. Se quiere fabricar latas de refresco cilíndricas de 500 cm^3 , de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones de la lata, sabiendo que su superficie lateral viene dada por la función

$$S(x, h) = 2\pi x^2 + 2\pi xh. \text{ (Sol.: } x = 4,3 \text{ cm y } h = 8,6 \text{ cm, para que } S \text{ sea mínima)}$$

76. Un producto ha estado 8 años en el mercado. Su precio, P(t), en euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que llevaba comercializándose dicho artículo mediante esta función:

$$P(t) = \begin{cases} 24t^2 + 24 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -15t + 150 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función P(t)

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo en el mercado? (Sol.: en $t=2$ no es derivable; creciente (0,2), decreciente (2, 8), en $t= 2$ alcanza el precio máximo, que es 120 €)

77. Disponemos de una gran extensión de terreno junto a una carretera y queremos cercar parte de su superficie para construir un camping que tenga forma rectangular y que ocupe 10.000 metros cuadrados. La cerca rodearía todo el camping, salvo diez metros junto a la carretera que dejaríamos para la entrada. Si queremos hallar cómo conviene colocar el camping para utilizar la menor cantidad posible de cerca, ¿cuánto metros de valla necesitaríamos?. (Sol.: 390 m.)

78. En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular; uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.

79. Entre todos los conos de generatriz 20 cm, averigua el radio de la base y la altura del que tiene volumen máximo. ($V \text{ cono} = 1/3 \text{ área base} \times \text{altura}$) (Sol.: $r = 16,33 \text{ cm}$ y $h = 11,55 \text{ cm}$)

80. Entre todos los triángulos isósceles cuyo perímetro es 36 cm, calcula el que tiene área máxima.
($l = 12 \text{ cm}$)

81. Los semanales de fabricas “x” consolas PS5 viene dado por la función $C(x)=30 + 4x -20\ln(x)$ (en miles de euros). Por cuestiones laborales solo se pueden fabricar entre 3000 y 10000 unidades cada semana. Determina cuántas consolas se deben fabricar semanalmente para minimizar los costes.

82. Los ingresos en miles de euros por la venta de “x” unidades de un cierto producto vienen dados por la función $I(x)=\frac{30x}{\sqrt{x}}$. Los gastos de fabricar “x” unidades vienen dados por la función $G(x)=3x+63$. Determina que número de unidades maximiza el beneficio y cuál es este.

83. Queremos vallar un terreno rectangular de 1000 m² con dos tipos de materiales. En dos de los lados paralelos queremos usar un material de 300 €/m lineal y en los otros dos lados paralelos un material de 160 €/m lineal. Determina las dimensiones de la parcela para hacer que el coste sea mínimo.

84. Determina las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica de 1 litro de tomate para que se pueda construir con la cantidad mínima de metal.

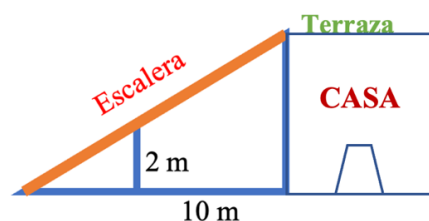
85. El Corte Inglés vende 200 consolas a la semana a un precio de 350€. El departamento de Ventas estima que por cada 10€ de rebaja se incrementará en 20 el nº de consolas vendidas semanalmente.

a) Determina la función que expresa el precio en términos del número de unidades vendidas.

b) Determina la función ingresos en términos del número de unidades vendidas.

c) Determina el número de unidades vendidas que maximiza los ingresos.

86. Una casa está rodeada por un muro de 2 m de altura. Desde la casa al muro hay 10 m de distancia tal y como se observa en la siguiente figura. Calcula la longitud mínima que debe tener una escalera para acceder desde la calle hasta la terraza.



87. Demuestra que de todos los triángulos isósceles de un perímetro dado el de mayor área es el triángulo equilátero.

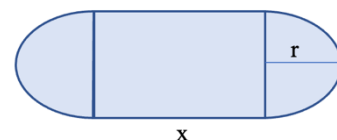
88. El rendimiento R de un cultivo en función del nivel de nitrógeno " x " en el suelo viene dado por la función $R(x) = \frac{ax}{x^2+1}$, $a > 0$, $x \geq 0$. ¿Con qué nivel de nitrógeno se obtiene el mejor rendimiento?

89. Después de tomar un fármaco por vía oral, la concentración de este en sangre viene dado por la función $C(t) = 2t^2e^{-bt}$, $b > 0$, $t \geq 0$, siendo t el tiempo en horas desde su administración. Halla el valor de b para que la máxima concentración de sangre se produzca al cabo de 2 horas.

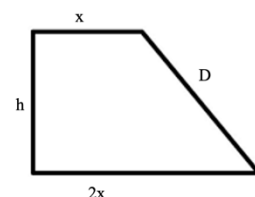
90. La tos obliga a la tráquea a contraerse y afecta a la velocidad del aire que circula a través de ella y puede modelizarse por la expresión $V(r) = kr^2(R-r)$, $0 \leq r \leq R$, $k \geq 0$, R es el radio normal de la tráquea y r el radio durante la tos. ¿Con qué radio se obtiene la máxima velocidad de aire?

91. El trayecto que realizan 2 corredoras, María y Antonia, se puede representar indicando que parten del origen de coordenadas y corren a lo largo del eje positivo de abscisas. Un fotógrafo se encuentra situado en $P(0,1)$. Si Antonia es 3 veces más rápida que María, ¿Cuál es el ángulo de visión máximo que tiene el fotógrafo para observar a ambas?

92. Queremos construir una pista de atletismo en forma de rectángulo con un semicírculo a cada lado de 400 m de longitud. Determina el área máxima de la región encerrada por la pista.



93. En el patio de una escuela se quiere construir un área de juegos de 30 m^2 en forma de trapecio rectangular con la base grande el doble que la base pequeña y que el lado oblicuo (D) respecto a las bases sea tan corto como sea posible (**Cataluña**).



94. De entre todos los rectángulos situados en el 1º cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x+2y=4$, determina los vértices del que tiene mayor área. (**Galicia**)

95. Una imprenta debe diseñar un cartel de 90 cm^2 para texto y, además, con un margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel para que se utilice la menor cantidad de papel posible (**Cantabria**)

UNIDAD 3. INTEGRAL INDEFINIDA. INTEGRAL DEFINIDA.

Esquema de repaso de la integral indefinida:

1. Primitiva de una función. Integral indefinida.

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ si $F'(x)=f(x)$. En general, todas las funciones $F(x)+K$ serán también primitivas.

La integral de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas y se denota por $\int f(x)dx = F(x)+K$.
 K se denomina constante de integración.

Propiedades: 1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; 2. $\int c \cdot f(x)dx = c + \int f(x)dx$

2. Tabla de integrales inmediatas.

Forma sencillo	Forma compuesta
$\int dx = x + K$	$\int k dx = k \cdot x + K$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \quad (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$ ($n \neq -1$)
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] + K$
$\int e^x dx = e^x + K$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + K$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K$
$\int \sin x dx = -\cos x + K$	$\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + K$
$\int \cos x dx = \sin x + K$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + K$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$	$\int [1 + \tan^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \tan f(x) + K$
$\int -(1 + \cotag^2 x) dx = \int \frac{-1}{\sen^2 x} dx = \cotag x + K$	$\int -[1 + \cotag^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \cotag f(x) + K$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctag x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctag f(x) + K$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \text{arc cotag } x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \text{arc cotag } f(x) + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc sen } x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \text{arc sen } f(x) + K$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc cos } x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \text{arc cos } f(x) + K$

3. Método de integración por partes.

Del producto de derivadas $\rightarrow d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv \rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

¿Cómo lo aplicamos?

$\int f(x) dx = \begin{cases} \text{llamamos } u(x) \text{ a una función que no tenga integral inmediata} \\ \text{llamamos } v(x)dx \text{ al resto de la integral} \end{cases}$

$$\int f(x) dx = \int u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du(x).$$

Nota: Para escoger $u(x)$ se utiliza la regla nemotécnica ALPES

A-Arcos(arccos,...), L- Logaritmos, P – Potencias ($x, x^2, \dots$), E – Exponencial (e^x), S – Senos, cosenos

4. Integración de funciones racionales. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

5.1 Si $\text{grado } P(x) > \text{grado } Q(x) \rightarrow$ Dividimos $P(x)$ entre $Q(x) \rightarrow P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, $\text{grado } R < \text{grado } Q$
 $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$, $\int C(x)$ es inmediata y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ es el caso 5.2

5.2 Si $\text{grado } P(x) < \text{grado } Q(x) \rightarrow$ Factorizamos el denominador $Q(x)$ y pueden darse 4 casos:

a) **Raíces reales simples** $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \rightarrow$ Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$

Calculamos los valores de A, B y C haciendo mcm y sustituyendo $x=a, x=b, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos.

b) **Raíces reales múltiples** $Q(x) = (x-a)^n \rightarrow$ Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{C}{(x-a)^n}$

Calculamos los valores de A, B, ..., C haciendo mcm y sustituyendo $x=a, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

c) **Raíces reales simples y múltiples** $Q(x) = (x-a)(x-b)^n \rightarrow$

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2} + \dots + \frac{D}{(x-b)^n}$

Calculamos los valores de A, B, C, ..., D haciendo mcm y sustituyendo $x=a, x=b, \dots$. Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

d) **No tiene raíces reales** $Q(x) = x^2 + a^2$ (factor irreducible de 2º grado)

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx}{Q(x)} + \frac{N}{Q(x)} \rightarrow$ La primera fracción se resuelve con logaritmos.

La segunda fracción hay que expresar $Q(x)$ de la forma $Q(x) = (x-a)^2 + b^2 = b^2 \cdot \left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right)$ con lo que

$$\int \frac{N}{Q(x)} = \frac{N}{b^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} dx = \frac{N}{b^2} \cdot \arctag\left(\frac{x-a}{b}\right) + k$$

5. Método de sustitución.

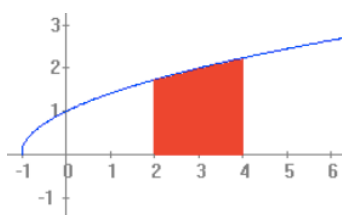
El método de integración por sustitución consiste en introducir una variable t , que sustituye a una expresión apropiada en función de x , de forma que la integral se transforme en otra de variable t , más fácil de integrar.

Ejemplo: $\int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$; Hacemos el cambio $t = \ln(x)$, $dt = 1/x dx \rightarrow \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{(\ln(x))^4}{4} + k$

Esquema de repaso de la integral definida:

6. Integral definida de una función continua.

Dada una función $f(x)$ continua y positiva en $[a, b]$, llamamos integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje OX. Dicha área la representaremos como $A = \int_a^b f(x) dx$. “a” se denomina límite inferior de la integración y “b” límite superior de la integración.



8. Regla de Barrow.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

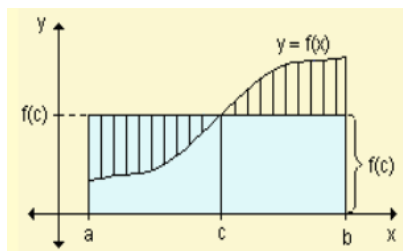
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

9. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, existe, por tanto, un punto $c \in [a, b]$ de tal modo que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Interpretación: El área del trapecio mixtilíneo considerando es igual que el área de un rectángulo de la misma anchura cuya altura sea la imagen de un punto que pertenezca al intervalo $[a, b]$



7. Propiedades.

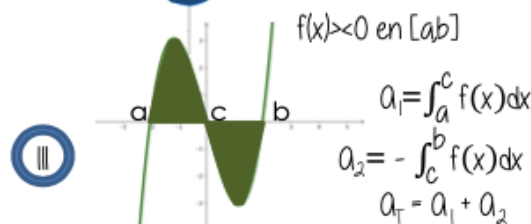
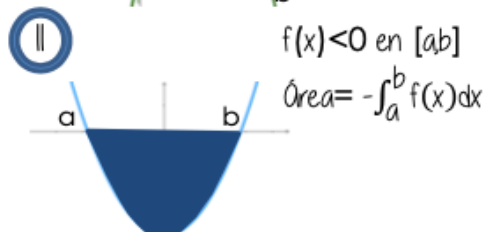
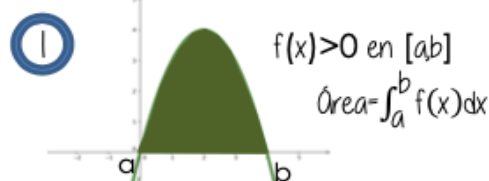
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- Si $f(x) > 0$ y continua en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$
- $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
- $f(x) \leq g(x)$ continuas $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

10. Teorema fundamental del Cálculo integral.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, y $G(x)$ es la función definida en $[a, b]$ como $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, entonces $G(x)$ es derivable en $[a, b]$ y $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

11. Cálculo del área bajo una curva.

Tres casos:

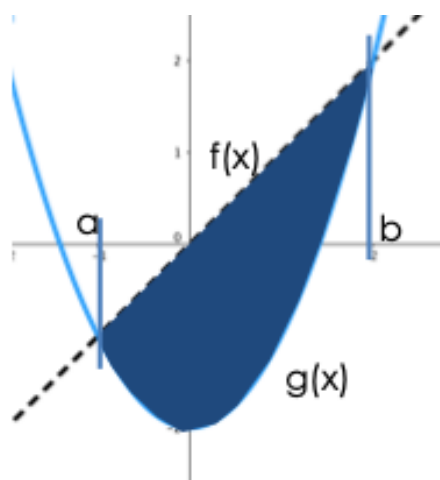


- Pasos:** 1) Hallar puntos de corte de $f(x)$ con OX.
2) Estudiar signo $f(x)$ en los intervalos obtenidos.
3) Hacer esbozo, escribir integrales y calcular.

12. Cálculo del área entre 2 curvas.

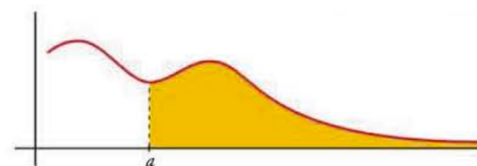
Pasos a seguir:

- 1) Hallar los puntos de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$ resolviendo $f(x)=g(x)$.
- 2) En los intervalos que forman los puntos anteriores estudiar cuál de las 2 funciones está por encima (para ello sustituye un punto intermedio de cada intervalo en cada función a ver cuál tiene más valor).
- 3) Realiza un esbozo de las funciones (RECOMENDABLE)
- 4) El área vendrá dada por $A=\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, siendo $f(x)$ la función que esté por encima.
- 5) Calcular la integral.



13. Integrales impropias (en recintos infinitos).

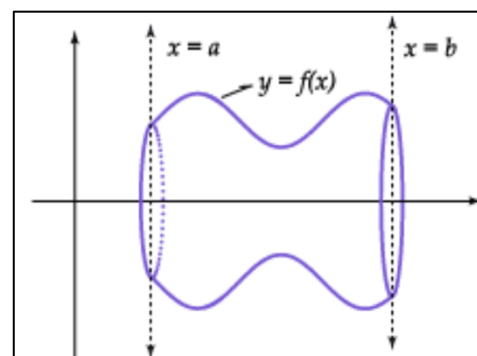
Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt$ existe y es finito, entonces llamaremos integral impropia a $\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt$



14. Volumen de un cuerpo de revolución mediante una integral.

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $y=f(x)$ alrededor del eje OX y limitado por $x=a$ y $x=b$ viene dado por

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



3. Integrales

B1. Medición	B1.2. Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva. B1.3. Cálculo de áreas bajo una curva: técnicas elementales para el cálculo de primitivas. B1.4. Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas o volúmenes de revolución.
--------------	--

TEORÍA: Definición de primitiva e integral de una función. Propiedades.

Ejercicios:

- Comprobar que $F(x) = x^3 + 7$ y $G(x) = x^3 - 3$ son funciones primitivas de $f(x) = 3x^2$
- Recordando las reglas de derivación, calcula las integrales de las siguientes funciones:

a) $\int \cos x \, dx$ b) $\int e^{2x} \, dx$ c) $\int x^2 \, dx$ d) $\int \frac{1}{x} \, dx$

(Sol.: a) $I = \sin x + C$; b) $I = \frac{1}{2} e^{2x} + C$; c) $I = \frac{1}{3} x^3 + C$; d) $I = \ln |x| + C$)

TEORÍA: Tabla de integrales inmediatas.

Forma sencilla	Forma compuesta
$\int dx =$	$\int k dx =$
$\int x^n dx =$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx =$
$\int \frac{1}{x} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$
$\int e^x dx =$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx =$
$\int a^x dx =$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx =$
$\int \operatorname{sen} x dx =$	$\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx =$
$\int \cos x dx =$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx =$
$\int (1 + \operatorname{tag}^2 x) dx =$	$\int [1 + \operatorname{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x) dx =$
$\int -(1 + \operatorname{cotag}^2 x) dx =$	$\int -[1 + \operatorname{cotag}^2 f(x)] \cdot f'(x) dx =$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx =$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx =$	$\int \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2} dx =$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx =$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx =$

Ejercicios

3. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

- a) $\int 3x^5 dx$; b) $\int \frac{1}{x^3} dx$; c) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx$; d) $\int 4 \cdot 3^x dx$; e) $\int \frac{3x}{x^2+5} dx$
- f) $\int x \cos(x^2+1) dx$; g) $\int \frac{5}{1+(2x)^2} dx$; h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$; i) $\int \cot g x dx$; j) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx$;
- k) $\int (2^x + 3^x) dx$; l) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$; n) $\int x \sqrt[4]{1-x^2} dx$; ñ) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; o) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$; p) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;
- q) $\int \operatorname{sen} e^{2x} \cdot e^{2x} dx$; r) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$; s) $\int \frac{x dx}{x^2-1}$; t) $\int \frac{dx}{9+x^2}$; x) $\int \frac{3 dx}{(x-3)^4}$

(Sol.: a) $I = \frac{1}{2} x^6 + k$; b) $I = \frac{-1}{2x^2} + k$; c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[6]{x^7}}{\frac{7}{6}} + k$; d) $I = 4 \frac{3^x}{\ln x} + k$; e) $I = \frac{3}{2} \ln(x^2+5) + k$

f) $I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2+1) + k$; g) $I = \frac{5}{2} \operatorname{arctg}(2x) + k$; h) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + k$; i) $I = \ln |\operatorname{sen} x| + k$;

j) $I = \sqrt[3]{x} + \frac{2}{9} \sqrt{5x^3} + C$; k) $I = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$; l) $I = 1/3 \operatorname{arc tang}(x^3) + C$; n) $I = \frac{1}{2} \sqrt[4]{(1-x^2)^5} + C$;

ñ) $I = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C$; o) $I = 1/3 \operatorname{arc tang}(3x) + C$; p) $I = \operatorname{sen}(\ln x) + C$; q) $I = -\frac{1}{2} \cos e^{2x} + C$; r) $I = \operatorname{sen}^2(x)/2 + C$

s) $I = 1/\ln |x^2-1| + C$; t) $I = 1/3 \operatorname{arc tang}(x/3) + C$; x) $I = -(x-3)^{-3}$

4. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

- a) $\int (x^2+4x)(x^2-1) dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$; c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx$; d) $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$; e) $\int \frac{dx}{4+x^2}$; f) $\int \frac{2dx}{1+9x^2}$; g) $\int \frac{5dx}{3x^2+1}$;
- h) $\int \frac{dx}{3+x^2}$; i) $\int \frac{1}{x} \ln^3 x dx$; j) $\int \frac{x}{(x^2+3)^5} dx$; k) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$; l) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x dx$;
- m) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; n) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$; ñ) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$; o) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$; p) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx$

(Sol.: a) $I = 1/5 x^5 + x^4 - 1/3 x^3 - 2x^2 + C$; b) $I = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + C$; c) $I = \ln |x| + \frac{1}{\sqrt{x}} + C$; d) $I = -\frac{1}{2(x-4)^2} + C$;

e) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arc tang}(x/2) + C$; f) $I = 2/3 \operatorname{arc tang}(3x) + C$; g) $I = \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} g(\sqrt{3}x) + C$;

h) $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctan} g(x/\sqrt{3}) + C$; i) $I = \frac{1}{4} \ln^4 x + C$; j) $I = -\frac{1}{8(x^2+3)^4} + C$; k) $I = 1/3 (1+\ln x)^3 + C$;

l) $I = \frac{3}{4} (1+\cos x)^{4/3}$; m) $I = \operatorname{arc sen}(x/3) + C$; n) $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen} \sqrt{2} x + C$; ñ) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \sqrt{2} x + C$;

o) $I = 1/3 \arcsin(x^3) + C$; p) $I = \ln|x-1| + C$

TEORÍA: Método de integración por partes

Ejercicios

5. Calcula

$\int x \cdot e^x dx$ b) $\int x^3 \ln x dx$ c) $\int \ln(x+1) dx$

(Sol.: a) $I = e^x(x-1) + k$; b) $I = \frac{x^4}{4} \ln|x| - \frac{x^4}{16} + k$; c) $I = (x+1) \ln|x+1| + k$

6. Julio 2021/22

2. b) [1 punto] Resuelve la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(2x) dx$.

7. Julio 2020/21

3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x) dx$.

8. Calcula:

a.- $\int \arctan x dx$ b.- $\int \sin(\ln x) dx$ c.- $\int x \sin x dx$ d.- $\int x^2 \cos x dx$; e.- $\int e^{-x} \sin x dx$

f.- $\int x \cdot 2^{-x} dx$ g.- $\int x^2 e^{-x} dx$ h.- $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

(Sol.: a) $I = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + k$; b) $I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$

c) $I = -x \cos x + \sin x + k$; d) $I = (x^2-2) \sin x + 2x \cos x + k$; e) $I = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + k$

$$f) I = -2^{-x} \left(\frac{x}{\ln 2} + \left(\frac{1}{\ln 2} \right)^2 \right) + k ; g) I = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + k ; h) I = (\ln x)(\ln(\ln x)) - \ln x + k$$

TEORÍA: Integración de funciones racionales.

Ejercicios

9. Calcula: a.- $\int \frac{x^2 - x + 3}{x} dx$ b.- $\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1} dx$ c.- $\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2} dx$

(S: a) $I = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x| + k$, b) $I = \frac{3x^2}{2} - 2x - 5\ln|x - 1| + k$, c) $I = \frac{3x^2}{2} - 5x + \ln|x + 2| + k$

10. Expresa las siguientes integrales de la forma $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$ y resuélvelas:

a) $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} dx$; b) $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1} dx$; c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2} dx$

11. Calcula:

a.- $\int \frac{5x + 2}{x^2 + x} dx$; b) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1} dx$; c) $\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2} dx$ d) $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 10x + 7}{x^3 - 7x - 6} dx$;

Sol.: a) $I = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} + k$; b) $I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x - 1| - 5\ln|x + 1| + k$; c) $I = 3\ln|x + 2| + 5\ln|x - 1| + k$;

12. Calcula:

a) $\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9} dx$; b) $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$; c) $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1} dx$; d) $\int \frac{5x - 3}{x^3 - x} dx$

(Sol.: a) $I = 5\ln|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$; b) $I = \ln|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + k$; c) $I = \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2} + k$) d) $I = \ln|x - 1| - \frac{5}{2(x - 1)^2} + k$

13. Calcula:

a) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$ b) $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$ c) $\int \frac{x + 5}{x^2 + 1} dx$

(Sol.: a) $I = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + 2\arctag x + k$; b) $I = \frac{1}{2}\arctag\left(\frac{x}{2}\right) + k$; c) $I = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + 5\arctag x + k$;

14. Calcula

a) $\int \frac{3x^2 - 7x + 4}{x - 3} dx$ b) $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4} dx$ c) $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx$

d) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$ (Sol: $x - 2\arctag x + C$) e) $\int \frac{2x^4}{(x - 1)^3} dx$ f) $\int \frac{3x^3 - 2}{(x - 2)^2} dx$

g) $\int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$ (Sol.: $x^2 + \text{Ln}|x-1| - \frac{1}{x-1} + \text{Ln}|x+2| + k$)

h) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$ (Sol.: 1) $I = \frac{3x^2}{2} + 2x + 10\text{Ln}|x-3| + k$; 2) $I = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\text{Ln}|x-4| + k$;))

15. Modelo Curso 2022/23

6. a) [1 punto] Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{2}{x^2 + x - 2} dx$.

16. Junio 2020/21

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$.

17. Julio 2020/21

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

TEORÍA: Método de sustitución.

Ejemplo: $\int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$

Ejercicios

18. Calcular:

a) $\int \sin^4 x \cos x dx$ ($t = \sin x$) b) $\int e^{3x+1} dx$ ($t = 3x+1$) c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ ($t = x^2$)

d) $\int \tan x dx$ ($t = \cos x$)

(Sol.: a) $I = \frac{1}{5} \sin^5 x + k$; b) $I = \frac{1}{3} e^{3x+1} + k$; c) $I = \frac{1}{2} \arctag x^2 + k$; d) $I = -\text{Ln} |\cos x| + k$)

19. Junio 2022/23

5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral:

Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t$.

$$\int \frac{dx}{(1 - 3x)^{1/2} - (1 - 3x)^{2/3}}$$

20. Junio 2021/22

3. b) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1 + 3x^2}} dx.$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

21. Junio 2020/21

3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3 + e^x} dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

22. Calcula: a.- $\int x e^{x^2} dx$ ($t=x^2$) b.- $\int x \cos x^2 dx$ ($t=x^2$) c.- $\int \frac{5x}{x^4 + 1} dx$ ($t=x^2$) d.- $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e.- $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ (cambio $x = t^{m.c.m.(2,3)}$) f.- $\int 2^{\sin x} \cos x dx$; g.- $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} dx$ (cambio $t = \sqrt{x-1}$) ;

h) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ ($t=e^x$)

(Sol.: a) $I = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$; b) $I = \frac{1}{2} \sin x^2 + k$; c) $I = \frac{2}{5} \arctag x^2 + k$; d) $I = - (1 - x^2)^{1/2} + k$;

f) $I = \frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + k$; g) $I = \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \ln|\sqrt{x-1}| + k$; h) $I = \arctan(e^x) + K$)

TEORÍA: Integral definida de una función continua.

TEORÍA: Propiedades

TEORÍA: Regla de Barrow

Ejercicios

23. Calcular: a) $\int_{-1}^2 (5 - x^2) dx$; b) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx$; c) $\int_e^{2e} \frac{1}{x} dx$; d) $\int_0^3 (x - 2)^2 dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$; f) $\int_0^1 x e^x dx$; g) $\int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$ h) $\int_1^e \ln x \, dx$ i) $\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

24. Calcula $\int_{-2}^5 f(x) dx$, siendo $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

25. Determina las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-4}^2 |x^2 - 4| dx$ b) $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$ c) $\int_{-3}^3 |x+2| dx$

26. Calcula $\int_{-1}^3 |f(x)| dx$ si $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

27. Calcula:

a) $\int_0^5 x^2 e^x dx$ b) $\int_2^3 \frac{x}{(1-x)^2} dx$ c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$ (Sol.: a) $17e^5 - 2$; b) $\ln 2 + \frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$)

TEORÍA: Teorema del valor medio del Cálculo Integral.



Ejercicios:

28. Aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral a la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Realizar la representación gráfica. (Sol.: $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$)

29. Hallar el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$. (Sol.: 16)

30. Hallar el valor medio de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ en el intervalo $[1, 3]$ y averigua en que valor se alcanza. (Sol.: $\frac{29}{3}$; $c = 2,08$)

31. ¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo integral a la siguiente función en el intervalo $[0, 1]$?

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ En caso afirmativo, comprobar su verificación. (Sol.: $c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$)

TEORÍA: Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Ejercicios

32. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$G(x) = \int_0^x (t^2 - 1) dt \quad H(x) = \int_0^{\cos x} (t^2 - 1) dt$$

(Sol.: $H'(x) = (\cos^2 x - 1) (-\sin x) = \sin^3 x$)

33. Halla la derivada de la siguiente función: $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t} dt$ (Sol.: $F'(x) = 2/x$)

TEORÍA: Cálculo del área bajo una curva.

Ejercicios

34. Calcula el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2 - 1$ las rectas $x = 0$, $x = 2$ y el eje X. (Sol.: $2 u$ de superficie)

35. Hallar el área comprendida entre la curva $f(x) = x^3 - x$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ (Sol.: $5/2 u^2$)

36. Halla el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$. (Sol.: $1 u^2$)

37. Calcula el área entre la curva $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ y el eje X. (Sol.: $37/12 u^2$)

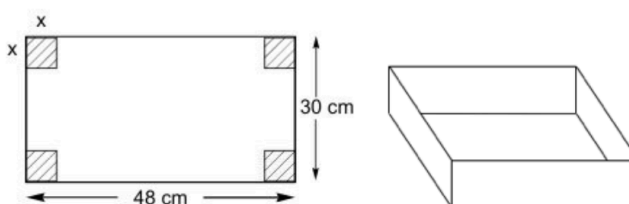
38. Averigua área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$

TEORÍA: Cálculo del área entre 2 curvas.

Ejercicios

39. Julio 2024/25

EJERCICIO 1. Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

40. Dada la función $y = x^2 + 1$. Halla el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$. (Sol.: $\frac{2}{3} u^2$)

41. Halla el área que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = x + 2$. (Sol.: $A = 4,5 u^2$)

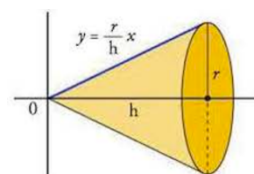
42. Calcular el área delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$. (Sol.: $A = 0,5 u^2$)

43. Calcula el valor del coeficiente b sabiendo que el área delimitada por la parábola $y = x^2 + bx - 2$ y la recta $2x + y + 2 = 0$, es $\frac{4}{3} u^2$. (Sol.: $b = 0$ y $b = -4$)

44. Averigua el área delimitada por la gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$ (Sol.: $4\sqrt{2} u^2$)
45. Hallar el área comprendida entre las curvas de las funciones $y = x^4 - x + 1$ y $y = x^4 - x^3 + 1$ y las rectas
46. $x = 0$, $x = 2$. (Sol.: $5/2 u^2$)
47. Calcular el área de la región limitada por las funciones $f(x) = 5x^3 - 4x$ y $g(x) = x$. (Sol.: $5/2 u^2$)
48. Hallar área limitada por las parábolas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y^2 = 2x$. Representa el recinto cuya área se pide. (Sol.: $4/3$)
49. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 1$, la recta $y = 5 - x$ y el eje OX. (Sol.: $35/6 u^2$)
50. Calcula el área del recinto plano limitado por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$. (Sol.: $7/6 u^2$)
51. Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.
52. Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

TEORÍA: Volumen de un cuerpo de revolución mediante una integral

53. Calcula el volumen engendrado al girar $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje OX entre 0 y 4.
54. Calcula la fórmula del volumen de un cono al girar $y = \frac{r}{h}x$ entre 0 y h.
55. Calcula el volumen de una esfera de radio 5 al girar la semicircunferencia $Y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje OX. ¿Entre que valores lo debes calcular?.



Ejercicios propuestos para repasar para el examen:

1. Interpretación de la integral. Se ha estimado que dentro de t meses la población de una cierta ciudad cambiará a una velocidad de $4 + 5 \cdot \sqrt[3]{t^2}$. Si la población actual ($t=0$) es de 10000 habitantes, ¿Cuál será la población dentro de 8 meses?

2. Interpretación de la integral. Se aplica un nuevo procedimiento médico a un tumor canceroso que tiene un volumen de 30 cm^3 , y t días después se determina que el volumen cambia a razón $V'(t)=0,15 \cdot e^{-0,006t} \text{ cm}^3/\text{día}$.

- Determina una fórmula para el volumen del tumor después de t días y calcula el volumen a los 60 días.
- Para que el procedimiento tenga éxito no deben transcurrir más de 90 días para que el tumor comience a disminuir. ¿Tiene éxito el procedimiento?

3. Interpretación de la integral. Una fuerza amortiguadora produce la vibración de un resorte a lo largo del eje OX de modo que la velocidad del resorte en cada instante $t \geq 0$ viene dada por la expresión $v(t) = 5e^{-t}(\cos(2t) - \sin(2t))$. Si la posición del resorte en el instante inicial es $x=1$, determina la posición en cada instante.

4. Interpretación de la integral. Un vivero pone a la venta un determinado tipo de arbusto después de 6 años de crecimiento. La tasa de crecimiento durante esos 6 años se aproxima por $\frac{dh}{dt} = 1,5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. En el momento de plantarlos ($t=0$), los arbustos tienen una altura de 12 cm. Calcula la altura que tendrán después de t años y la altura cuando se pongan a la venta.

5. Interpretación de la integral. Se le aplica a un paciente una inyección de $0,5 \text{ mg/cm}^3$ de un medicamento. La concentración de ese medicamento en sangre medido en mg/cm^3 disminuye t minutos más tarde a la tasa

o velocidad de $C'(t) = \frac{-0,01e^{0,01t}}{(1+e^{0,01t})^2}$.

- Calcula la concentración $C(t)$ que habrá en cada instante t y la concentración al cabo de 1 y 3 horas.
- ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la concentración en sangre sea menor de $0,05 \text{ mg/cm}^3$?

Resolución de integrales indefinidas

6. Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:

a) $\int x \ln x \, dx$; b) $\int e^x \cos x \, dx$; c) $\int x^2 \sin x \, dx$; d) $\int \cos(\ln x) \, dx$; e) $\int \arctag x \, dx$

f) $\int (x+1)^2 e^x \, dx$; g) $\int \frac{x}{e^x} \, dx$; h) $\int \arccos x \, dx$; i) $\int x \cdot 2^{-x} \, dx$; j) $\int x^2 \cos 2x \, dx$

(Sol.: a) $I = \frac{x^2}{2} \ln|x| + \frac{1}{4} x^2 + C$; b) $I = \frac{1}{2} [e^x \sin x + e^x \cos x] + C$; c) $I = -x^2 \cos x + 2 [x \sin x + \cos x] + C$;

7. Calcula las siguientes primitivas usando el método de sustitución y después el método de racionales:

$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$ ($t=1+\sqrt{x}$) b) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1} \, dx$ ($t=e^x$) c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \, dx$ ($t=\sqrt[3]{x}+1$)

(Sol.: a) $-(1+\sqrt{x})^2 + 6(1+\sqrt{x}) - 4 \ln|1+\sqrt{x}| + k$ b) $I = x - \frac{1}{2} \ln|e^{2x}+1| + \arctag(e^x) + k$

c) $I = \frac{3(\sqrt[3]{x}+1)^2}{2} - 2(\sqrt[3]{x}+1) + \ln|(\sqrt[3]{x}+1)| + k$

8. Septiembre 2016/17

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx \quad \text{b) } \int x^2 \ln x \, dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

9. PAEG JUNIO 2015 2B.

Dada la función $f(x) = (x + 1) \cdot e^{2x}$, se pide: a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. (1,25 puntos) b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas.

(1,25 puntos). (Sol.: a) Cóncava $(-2, +\infty)$, convexa $(-\infty, -2)$. P. Inflexión $(-2, 1/e^4)$; b) $F(x) = \frac{(2x+1)e^{2x}}{4} - \frac{1}{4}$

10. PAEG SEP-2015

Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - 4\sqrt{x}) dx \quad \int x \ln x \, dx \quad (\text{Sol.: a) } \frac{8}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + k; \text{ b) } \frac{x^2}{2} (2 \ln x - 1) + k)$$

11. PAEG SEP-2014

Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx, \quad \int \frac{2}{4 + x^2} dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln \sqrt{e^{2x} - 1} + k; I = \arctag \left(\frac{x}{2} \right) + k)$$

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = e^x$

12. PAEG Reserva 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \int (x^2 + 2x) \ln x \, dx \quad (\text{Sol.: } I = 2 \arctag (\sin x) + k; I = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + k)$$

13. PAEG Reserva 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x \right) dx \quad \int 3\sqrt{2x+1} \, dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln^2 x + x \ln x - x + k; I = (2x+1) \sqrt{2x+1} + k)$$

14. PAEG Junio 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx \quad (\text{Sol.: } I = \ln(1 + \sin^2 x) + k; I = \ln x + \frac{1}{4} [\ln |x-2| - \ln |x+2|] + k)$$

15. PAEG Septiembre 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral

(Sol.: $I = 2 \ln x^2 - 2 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + k$; $I = \ln |e^x - 2| - \ln |e^x - 1| + k$)

16. PAEG SEPTIEMBRE 2012 2A

Calcula las siguientes integrales

a) $\int \sin^2 x \cos x dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (Sol.: a) $I = \frac{\sin^3 x}{3} + k$; b) $I = 2 e^{\sqrt{x}} + k$)

17. PAEG RESERVA 2012 2A

Calcula la siguiente integral $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$ (Sol.: $I = \ln |x+1| - \ln |x| - 2/x + k$)

18. PAEG RESERVA 2012 2A

Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x^2 + 1) e^x$ tal que $F(0) = 5$. (Sol.: $F(x) = (x^2 - 2x + 3) e^x + 2$)

19. PAEG JUNIO 2012 2B

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$ b) $\int (\tan x + \frac{1}{\tan x}) dx$

20. PAEG JUNIO 2011 2 A

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (\cos 2x + \sin x \cos x) dx$ b) $\int \frac{x^3-1}{x+2} dx$

(Sol.: a) $I = \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \sin^2 x + k$, b) $I = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 4 - 9 \ln(x+2) + k$)

Integral definida en problemas de la vida real

21. Un pozo de petróleo produce 300 barriles de crudo al mes, pero se prevé que se agotará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del crudo será $p(t)=18 + 0,3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende inmediatamente después de extraerlo del suelo, ¿Cuál será el ingreso total del pozo entre los 0 y los 36 meses?

22. El volumen en litros de aire contenido en los pulmones durante un ciclo respiratorio se aproxima mediante el modelo $V(t)=0,1729t + 0,1522 t^2 - 0,037t^3$, donde t es el tiempo en segundos. Da un valor aproximado del volumen medio de aire contenido en los pulmones durante un ciclo de 5 segundos.

23. Se introduce una toxina en una colonia de bacterias cuya población actual es de 600000. Las observaciones indican que cada hora nacen 200 bacterias en la colonia y que la fracción de la población que sobrevive durante t horas es $S(t)=e^{-0,015t}$. ¿Cuál es la población de la colina después de 10 horas?

Ejercicios de Integral definida

24. Junio 2021/22

3. a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?
- a.2) **[1 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

5. b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geoméricamente lo hallado.

25. Julio 2021/22

5. b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

26. Junio 2019/20

5. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx$.
- b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

27. Julio 2019/20

5. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1 + e^x}$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)
- b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

28. Junio 2018/19

- 2A.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

29. Junio 2018/19

- 2B.** Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

30. Julio 2018/19

- 2A.** a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

31. Julio 2018/19

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx \quad \text{b) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

32. Junio 2017/18

- 2B.** Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

33. Junio 2017/18

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^\pi (x^2 - 1) \cos x dx \quad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

34. Septiembre 2017/18

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} dx \quad \text{b) } \int_1^2 (2x - 3)e^{x-1} dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

35. Septiembre 2017/18

2A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$. **(1 punto)**

36. Junio 2016/17

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

37. Septiembre 2016/17

- 1A.** a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x - 1)(x + 2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

38. Andalucía 2023 – Opción A

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x - 1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)}$

39. Madrid 2022 Extraordinario – Opción A

Problema 22.9.2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.
b) (1,25 puntos) Calcular $\int x f(x) dx$.

40. PAEG JUNIO 2016 2A

Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx$ (Sol.: $I = \frac{\pi}{2} - 1$)

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variables $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes

41. PAEG JUNIO 2016 2B

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ y } g(x) = -x^2 + 2x + 11. \text{ (1,5 puntos)}$$

b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. (1 punto) (Sol.: a) $A = 112/3 \text{ u}^2$; b) $c = 3/2$)

42. PAEG SEPTIEMBRE 2016 2A

Dada la función $g(x) = (x + b) \cos x$, $b \in \mathbb{R}$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0) = 1$

b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$

(Sol.: a) $G(x) = (x + b) \sin x + \cos x$; b) $b = -1$)

43. PAEG SEPTIEMBRE 2016 2B

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ (0,5 puntos)

b) Calcular el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: b) $A = (3/2 - \ln 4) \text{ u}^2$)

44. PAEG JUNIO 2015 2A

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ (2 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior (2 puntos) (Sol.: $A = 16/3 \text{ u}^2$)

45. PAEG SEPTIEMBRE 2015 2A.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. (0,5 puntos)

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. (0,5 puntos)

c) Calcula el área de la región anterior. (1,5 puntos) (Sol.: c) $A = 14/3 \text{ u}^2$)

46. PAEG SEPTIEMBRE 2014 2A

a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$, y rectas $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: $A = 4 \text{ u}^2$)

UNIDAD 4. Matrices. Determinantes.

1. Definición de Matriz.

Se denomina matriz de orden o dimensión $m \times n$ a todo conjunto cuyos elementos están dispuestos en m filas y n columnas. La representaremos por $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{21} elemento que está en la fila 2 columna 1

2. Tipos de matrices.

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ CUADRADA matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto ceros.

MATRIZ FILA matriz que solo tiene una fila.

MATRIZ COLUMNA matriz que solo tiene una columna.

MATRIZ NULA todos sus elementos valen cero.

MATRIZ TRASPUESTA DE A, es otra matriz A^t que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

MATRIZ SIMÉTRICA es una matriz cuadrada cuyos elementos a ambos lados de la diagonal principal son iguales. $A = A^t$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA, matriz cuadrada en la que los elementos a ambos lados de la diagonal principal son opuestos (iguales pero con distinto signo). Los elementos de la diagonal principal deben ser cero. $-A = A^t$

MATRIZ DIAGONAL matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR) todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal principal son cero.

3. Operaciones con matrices.

-Suma. Tienen que tener la misma dimensión. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Propiedades: Conmutativa, Asociativa, E. Neutro ($A + 0 = 0 + A$) y E. Opuesto ($A + (-A) = (-A) + A = 0$)

-Multiplicación de un n° por una matriz. $A = (a_{ij}) \rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Propiedades: $k \cdot (A + B) = kA + kB$, $(k + t) \cdot A = kA + tA$, $(k \cdot t) \cdot A = k \cdot (t \cdot A)$, $1 \cdot A = A$

-Multiplicación de matrices. Para multiplicar 2 matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p} \rightarrow A \cdot B = (c_{ij})_{m \times p}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1^\text{a} \text{ FILA POR } 1^\text{a} \text{ COLUMNA} & 1^\text{a} \text{ FILA POR } 2^\text{a} \text{ COLUMNA} & 1^\text{a} \text{ FILA POR } 3^\text{a} \text{ COLUMNA} \\ 2^\text{a} \text{ FILA POR } 1^\text{a} \text{ COLUMNA} & 2^\text{a} \text{ FILA POR } 2^\text{a} \text{ COLUMNA} & 2^\text{a} \text{ FILA POR } 3^\text{a} \text{ COLUMNA} \end{matrix}$

Propiedades: No se cumple conmutativa $A \cdot B \neq B \cdot A$, Si cumple Asociativa, Distributiva suma y E. Neutro.

-Potencia de una matriz. $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ..., $A^n = A^{n-1} \cdot A$

4. Propiedades de la matriz traspuesta.

Se llama matriz traspuesta (A^t) a la que se obtiene de cambiar las filas por las columnas o al revés.

Propiedades:

- 1) $(A^t)^t = A$
- 2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
- 3) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- 4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (**Cuidado, cambia el orden**)

5. Rango de una matriz.

El rango de una matriz A , $rg(A)$, es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

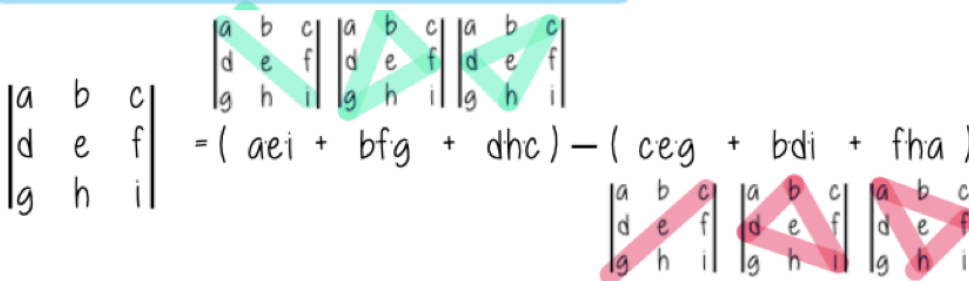
Método de Gauss: consiste en convertir la matriz inicial en una matriz triangular superior cuyos elementos por debajo de la diagonal sean ceros, utilizando las transformaciones elementales adecuadas. El rango de la matriz será el número de filas no nulas que tiene la matriz triangular que hemos obtenido.

6. Determinantes.

DETERMINANTES 2X2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

DETERMINANTES 3X3 - REGLA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha)$$


Propiedades:

- 1) $|A| = |A^t|$
- 2) Si permutamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo
- 3) Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por dicho número.
- 4) Si una matriz tiene 2 filas o 2 columnas iguales su determinante es 0.
- 5) Si una matriz tiene una fila o columna nula su determinante es 0.
- 6) Si 2 filas o 2 columnas son proporcionales su determinante es 0.
- 7) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

- 8) Si todos los elementos de una línea están formados por 2 sumandos, su determinante se descompone en la suma de 2 deter. con esos sumandos.

$$\begin{vmatrix} a+3 & 4 \\ b+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

- 9) Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas su determinante no varía.

- 10) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ // 11) Si una matriz tiene una línea que es C.Lineal de las otras paralelas entonces su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Matriz inversa. Propiedades.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n es otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **regulares o invertibles**, y las que no la tienen, matrices **singulares**. Una matriz cuadrada de orden n solo tiene inversa si $r(A) = n$.

Propiedades:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$ 2) $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$ 3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (**Cuidado, cambia el orden**)
4) $I^{-1} = I$ 5) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ 6) $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ 7) $|A^{-1}| = 1/|A|$

8. Formas de calcular la matriz inversa.

1º) Método de Gauss
ecuaciones)



2º) Aplicando la definición $A \cdot A^{-1} = I$ (con sistema

3º) **Usando determinantes** Si $|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$

- Menor complementario de $a_{ij} \rightarrow$

- Adjunto de $a_{ij} \rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

- Matriz Adjunta $\rightarrow Adj = (A_{ij})$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

SIGNOS: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

que se obtiene de quitar fila i y columna j

MATRIZ ADJUNTA $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calculamos la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5 + 12 + 12 - (-30 - 2 + 12) = 29 - (-20) = 49 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Cálculo del determinante usando los adjuntos

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 4 \cdot A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 + (-28) = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{31} + (-1) \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -28 + 2 + 1 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-25) = -25$$

DESARROLLARLO POR UNA LÍNEA Y SUS ADJUNTOS.

Ejemplo cálculo determinante de matriz 4x4 haciendo 0 en la 2ª fila (sumando C.Lineal de 1ª columna)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{21} =$$

$$= (-1) \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \right) = (32 - 20 - 2) - (-4 - 16 + 20) = 10 - 0 = 10$$

10. Rango de una matriz por determinantes

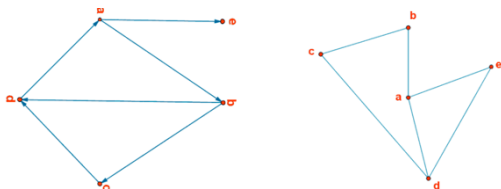
El rango de una matriz A será el orden (dimensión) de la mayor submatriz con determinante no nulo.

Empezaremos probando con el determinante de la mayor submatriz y si sale 0, iremos probando con determinantes de submatrices más pequeñas.

12. Grafos.

Un grafo es un conjunto de puntos, llamados vértices o nodos y un conjunto de pares de vértices denominados aristas o arcos.

Diremos que un grafo es **dirigido** si sus aristas o arcos están orientados y **no dirigido** en caso contrario.



11. Ecuaciones matriciales.

Las resolveremos de la siguiente forma:

ECUACIONES MATRICIALES

$$AX=B, A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B, X=A^{-1} \cdot B$$

$$XA=B, XAA^{-1} = B A^{-1}, X = B A^{-1}$$

$$AX+B=C, AX=C-B, A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (C-B), X = A^{-1} \cdot (C-B)$$

Importante: Producto matrices no es conmutativo

13. Matriz de adyacencia de un grafo.

Todo grafo (dirigido o no) puede representarse por una matriz cuadrada de orden n, con n el nº de vértices.

$A=(a_{ij})$ con $a_{ij} = h$ (el nº de caminos que une v_i y v_j)

Si el grafo es dirigido la matriz A es simétrica.

A^n será la matriz de nº de caminos de longitud n que unen cada dos vértices.

4. Matrices. Determinantes

A1. Sentido de las operaciones	A1.1. Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades. A1.2. Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
A2. Relaciones	A2.1. Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
D1. Patrones	D1.1. Generalización de patrones en situaciones sencillas.
D2. Modelo matemático	D2.3. Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos.
D5. Pensamiento computacional	D5.1. Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología empleando las herramientas o los programas más adecuados. D5.2. Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Estos saberes se concretan en los siguientes contenidos

Tipos de vectores y matrices. Trasposición de matrices. Matriz inversa. Operaciones con vectores y matrices. Aplicación de las operaciones con vectores y matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.

Determinantes. Regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes. Cálculo de determinantes por los elementos de una línea. Cálculo de la matriz inversa. Rango de una matriz. Cálculo del rango de una matriz. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones matriciales. Aplicaciones a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Definición de grafo. Matriz de adyacencia de un grafo. Operaciones con la matriz de adyacencia del grafo y su interpretación en ejemplos sencillos.

TEORÍA: Definición de matriz.

TEORÍA: Tipos de matrices.

Matriz cuadrada:

Matriz identidad o unidad:

Matriz fila:

Matriz columna:

Matriz nula:

Matriz traspuesta de A:

Matriz simétrica:

Matriz antisimétrica:

Matriz diagonal:

Matriz triangular superior (inferior):

TEORÍA: Operaciones con matrices.

Ejercicios

1. Efectúa las siguientes operaciones: $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ (Sol.: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$)

2. **Modelo 2 – 2023/24.** Calcula las matrices A y B que cumplen $A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

3. Calcula las matrices A y B que verifican:

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (Sol.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

4. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

(Sol.: $A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}$; $A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}$; $C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$;

$D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}$; $D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$)

5. **EVAU - Junio 2022/23.** Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a,b,c para que $A \cdot X = B$

b) Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir?. ¿Cómo es la matriz X resultante?.

6. **EVAU - Junio 2021/22.** a) Encuentra las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, que verifican que $AX=XA$. b) ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante sea 4?

7. **EVAU – Junio 2019/20.** 1.b) Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

8. Calcula A^2 , A^3 y A^4 y obtén una fórmula general para A^n : a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halla A^2 , A^3 , A^5 . Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A , es decir, de A^n , para cualquier número natural n .

10. Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Sol.: $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$)

Problemas de matrices aplicados a la vida real

11. **Suma y resta matrices.** El número de coches vendidos por dos marcas M1 y M2 de combustión (C) (gasolina y diesel) y eléctricos (E) durante 2022 y 2023 viene dado por las siguientes matrices A y B .

a) Calcula el número total de coches de cada marca vendidos en los dos años según su combustible.

b) ¿Se puede afirmar que la disminución de ventas de vehículos de combustión se ve compensada con el auge del número de vehículos eléctricos vendidos entre estos dos años?.

Año 2022

$$A = \begin{pmatrix} \text{C} & \text{E} \\ 6400 & 900 \\ 4000 & 250 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}$$

Año 2023

$$B = \begin{pmatrix} \text{C} & \text{E} \\ 5300 & 950 \\ 3200 & 280 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}$$

12. **Producto de una matriz por un número real.** Los costes de fabricación y el precio de venta de tres tipos de raquetas durante el año 2022 viene dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 20 & 30 & 40 \\ 60 & 65 & 70 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Coste Fabricación} \\ \text{Precio de venta} \end{matrix}$$

Si durante el año 2023 se espera un incremento del 2% tanto en el coste de fabricación como en el precio de venta, expresa mediante matrices ese aumento.

13. **Producto de matrices.** Durante un viaje a Tenerife, un grupo de 10 chicas y 12 chicos deciden alquilar hoverboard, patinetes y bicis. Las siguientes matrices representan la distribución de vehículos alquilados por chico/a y el precio de cada uno en tres empresas de alquiler:

$$A = \begin{pmatrix} \text{H} & \text{P} & \text{B} \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Chicas} \\ \text{Chicos} \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{E1} & \text{E2} & \text{E3} \\ 10 & 12 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Hoverboard} \\ \text{Patinetes} \\ \text{Bicis} \end{matrix}$$



Calcula mediante matrices el precio total de cada vehículo para las chicas y para los chicos.

TEORÍA: Matriz traspuesta. Propiedades.

Ejercicios

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

15. Siendo A y B matrices cuadradas, demostrar que:

a) $A + A^t$ es simétrica. b) $A \cdot A^t$ es simétrica c) Si A es simétrica, entonces $B^t \cdot A \cdot B$ es simétrica.

TEORÍA: Rango de una matriz. Método de Gauss.

16. EVAU – Junio 2022/23. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

17. Determinar el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix}$$

(Sol.: $r(A)=2$; $r(B) = 2$; $r(C) = 3$; $r(D) = 2$)

TEORÍA: Determinantes.

Ejercicios

18. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: a) } 13; \text{ b) } 0; \text{ c) } 28)$$

19. Analiza para qué valores de “a” son regulares las matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} a-1 & -3 \\ -a-1 & a+1 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: a) } a \neq 4; \text{ b) } a \neq -1, 4)$$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47 \quad (\text{Sol.: a) } x = 6; \text{ b) } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$$

TEORÍA: Propiedades de los determinantes.

Ejercicios

21. Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$

22. Modelo propuesto - Curso 2022/23. 6.b) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, calcula (indicando las propiedades que utilizas) el determinante de $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

23. Julio - Curso 2021/22. 3.b) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$, calcula (indicando las propiedades que utilizas) el determinante de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

24. Sabiendo que el determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

25. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

(Sol.: a) 3; b) 1; c) 1)

26. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

(Sol.: a) 4; b) 6; c) 12/5)

TEORÍA: Matriz inversa.

TEORÍA: Propiedades de la matriz inversa.

Ejercicios:

27. A , B y C son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.

a) $|A^t|$ b) $|B^{-1}|$ c) $|A B^{-1}|$ d) $|A B^{-1}|$ e) $|(B C)^{-1}|$ f) $|C^{-1} B^t|$

(Sol.: a) $|A^t| = |A| = 5$; b) $|B^{-1}| = 1/|B| = 1/4$; c) $|A B^{-1}| = |A| \cdot 1/|B| = 5/4$; d) $4/5$; e) $1/8$; f) 2)

28. Dadas la matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$. Justifica las respuestas.
(Sol.: **1/3; 6; 3/2**; . $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, $|A^t| = |A|$)

TEORÍA: Formas de calcular la matriz inversa.

Ejercicios

29. PAU – Julio 2024/25

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) [1,25 puntos] Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) [1,25 puntos] Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a .

30. EVAU - Junio 2022/23. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} , razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

31. Modelo 1- Curso 2023/24. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A es invertible.

32. Modelo - Curso 2022/23. Estudia qué relación tiene que haber entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$, para que la siguiente matriz tenga inversa: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ a & b & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

33. Hallar la matriz inversa de las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Sol.: a) $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; b) $B^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix}$; c) $C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)

34. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? // b) Calcula la matriz inversa cuando $a = 2$.

TEORÍA: Cálculo de determinantes usando los adjuntos.

Ejercicios

35. Calcula los determinantes siguientes:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} & b) & \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} & c) & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & d) & \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

(Sol.: a) -2030; b) 0; c) -28; d) 83)

36. EVAU – Junio 2019/20. 1. a) Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

TEORÍA: Rango de una matriz por determinantes

Ejercicios

37. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(Sol.: 3, 3, 4, 2)

38. Calcular el rango de las siguientes matrices según los valores de a:

$$\begin{aligned}
 a) \ A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} & b) \ B &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & c) \ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(Sol.: a) $a = 2$ $r(A) = 2$; $a \neq 2$ $r(A) = 3$; b) $a = 0$, $a = 1/2$ $r(B) = 2$; $a \neq 0, 1/2$ $r(B) = 3$; c) $a = 2$ $r(C) = 3$; $a \neq 2$ $r(C) = 4$)

39. Modelos - Curso 2022/23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente el rango de A según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

40. EVAU - Junio 2021/22. Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función de $m \in \mathbb{R}$

TEORÍA: Ecuaciones matriciales.

Ejercicios

41. PAU – Junio 2024/25

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) [1,5 puntos] ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) [1 punto] Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

42. EVAU - Junio 2020/21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, a) Calcula A^t

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

43. EVAU - Julio 2021/22. Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

44. EVAU - Julio 2020/21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+3I=A$

45. EVAU - Julio 2019/20. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

46. EVAU - Junio 2018/19. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX-2B=C$.

47. EVAU - Julio 2018/19. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para $a=1$, calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A = B \cdot X$.

48. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$ (Sol.: $X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$)

49. Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1}XA = B$ b) $(A + X)B = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Sol.: a) $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$)

50. Halla X tal que $3AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Sol.: $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$)

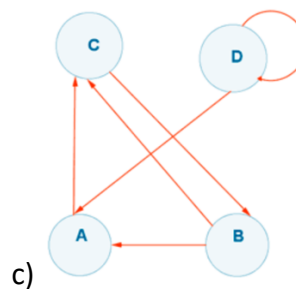
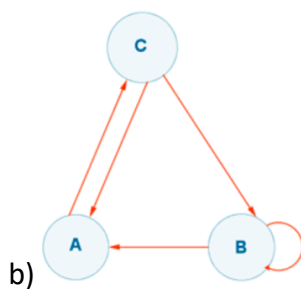
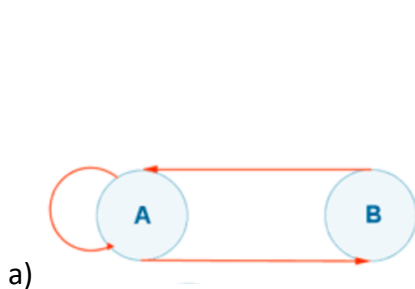
51. (PAU – Madrid Sep-2007) Calcular una matriz cuadrada X que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Sol.: $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$)

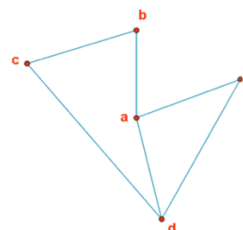
TEORÍA: Grafos.

TEORÍA: Matriz de adyacencia de un grafo.

52. Obtén la matriz de adyacencia asociada a los siguientes grafos dirigidos:

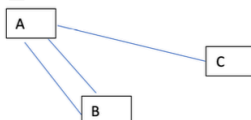


53. Obtén la matriz de adyacencia asociada al siguiente grafo no dirigido y calcula el número de caminos de longitud 2 y de longitud 3 que unen cada par de vértices.



54. Modelo 2 - 2023/24

- b) [1,5 puntos] El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones A, B y C. Halla la matriz G asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen para ir de A a C haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?

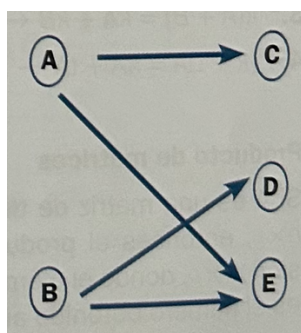


55. Interpretación de matrices. La siguiente matriz representa entre que ciudades hay vuelos que comuniquen Madrid, Sevilla, Palma y Barcelona. Los “1” indican que hay un vuelo entre las ciudades.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} M & S & P & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} M \\ S \\ P \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Expresa mediante una matriz el número de vuelos que hay entre estas ciudades que tienen 1 escala intermedia (Nota: Calcula A^2)
- Expresa mediante una matriz el número de vuelos que hay entre estas ciudades que tienen 2 escalas intermedias (Nota: Calcula A^3)

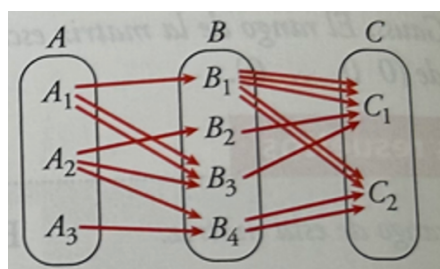
56. Interpretación de grafos y matrices. Tenemos un **grupo 1** con dos personas A y B que han contraído una enfermedad. Tenemos un **grupo 2** con tres personas C, D y E que han estado en contacto directo con el grupo 1 de acuerdo con el grafo de más abajo. Finalmente tenemos un grupo 3 con cuatro personas F, G, H y J que han mantenido contacto directo con el grupo 2 de acuerdo con los elementos de la siguiente matriz T.



$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & G & H & J \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Representa el grafo que conecta los 3 grupos.
- Obtén la matriz M que representa el grafo de los grupos 1 y 2.
- Calcula el producto de las matrices M·T e interpreta que quiere decir el resultado obtenido.

57. Interpretación de matrices. En un país A hay tres aeropuertos A_1 , A_2 y A_3 . En un país B hay cuatro aeropuertos B_1 , B_2 , B_3 y B_4 . En un país C hay dos aeropuertos C_1 y C_2 . El siguiente esquema representa las posibles comunicaciones que hay entre aeropuertos un cierto día de la semana.



- Representa una matriz “M” que indique el número de vuelos entre A y B, y otra matriz “N” que indique el número de vuelos entre B y C.
- Utilizando el producto de matrices, calcula una matriz que represente el número de combinaciones de vuelos que hay para ir de cada aeropuerto de A hasta cada aeropuerto de C, pasando por B.

Otros ejercicios propuestos

Operaciones con matrices

1. Un industrial produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos. A, B y C. La producción semanal de tornillos es:

Planos: 2000 A 2500 B 3000 C Estrella: 2500 A 3500 B 4000 C

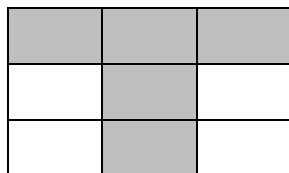
El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo A es de un 5%, del tipo B es de un 4% y del tipo C es de un 2%. Expresa la matriz de la producción semanal de tornillos y calcula el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

(Sol.: Tornillos planos no defectuosos: 7 240 Tornillos de estrella no defectuosos: 9 655)

2. En un instituto A hay 43 chicas y 40 chicos en 3º de la E.S.O. y en 4º de la E.S.O. hay 41 chicas y 50 chicos, mientras que en otro instituto B, en 3º de la E.S.O. hay 130 chicas y 90 chicos, y en 4º de la E.S.O. hay 70 chicas y 80 chicos. Ordena estos datos en forma de matrices y calcula el número de chicas y chicos por curso en los dos institutos juntos.

3. Interpretación gráfica de matrices. Queremos digitalizar la letra T de la figura del margen. Tienes una tabla que te indica la conversión de los colores a números.

- Escribe la matriz que representa la fotografía digital de la letra T.
- Encuentra una matriz que al sumarla te permita ajustar el contraste de gris oscuro a negro y de blanco a gris claro.
- Encuentra una matriz que te permita cambiar de negro a gris claro y el resto de gris claro a gris oscuro.



Blanco	Gris Claro	Gris Oscuro	Negro
0	1	2	3

Matriz traspuesta

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$ b) $(3A)^t = 3A^t$

Determinantes

5. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (Sol.: a) 18 ; b) -24;)

Matriz inversa

6. Consideramos la matriz A: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Sol.: a) $x \neq 0$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

¿Para qué valores de x tendrá inversa la matriz? b) Hállala para $x = 2$

7. Determina el valor de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. Calcula A^{-1} para los restantes valores de a .

8. Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares (no tienen inversa) y calcula:

a) A^{-1} si $t = 1$ b) B^{-1} si $t = 2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Sol.: $t = 2$ y $t = -6$; a) $A^{-1} = -1/7 \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$)

9. Considera la matriz A que depende de un parámetro a :

$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a) ¿Para qué valores de a tiene A inversa? Justifica la respuesta

b) Para $a = 0$ halla la inversa de A . (Sol.: a) Tiene inversa para $a \neq 1$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Cálculo de determinantes por adjuntos

10. Calcula los siguientes determinantes:

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

(Sol.: e) -24; f) 0)

11. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ (Sol.: a) -72; b) 0; c) -18)

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$

(Sol: a) 1, -3; b) 2, 3, 1; c) 1, -1; d) 0, -2)

13. ¿Para qué valores de a se anula este determinante?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Cálculo del rango de una matriz por determinantes

14. Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t :

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

(Sol.: a) $t = 0, 1$ $r(A) = 3$; $t = 2$ $r(A) = 2$; $t \neq 2$ $r(A) = 3$; b) $t = 0, 1, 2$ $r(B) = 2$; $t \neq 0, 1, 2$ $r(B) = 3$)

15. Calcula el rango, según los valores de m ,

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(Sol.: a) Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$, Si $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$, Si $m \neq -2$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$)

16. Calcula el rango de la matriz siguiente:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a . (Sol.: $a = 2$ $r(M) = 3$; $a \neq 2$ $r(M) = 4$)

17. Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t :

a) $A = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(Sol.: c) si $m = 1$ $r(M) = 2$; si $m \neq 1$ $r(M) = 3$)

Ecuaciones matriciales

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ (Sol.: a) $m = 0$ $r(A) = 1$; $m \neq 0$ $r(A) = 3$; b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$)

a) Estudia, según los valores de m , el rango de A .

b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $XA + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3

19. Halla una matriz X que cumple la condición:

$X \cdot B + B = B^{-1}$, siendo $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (S: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

(Castilla-La Mancha, 1996)

20. Encuentra una matriz X que verifique $A \cdot X + B = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (S: X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix})$$

21. Halla la matriz X que satisface la ecuación: $A \cdot X \cdot B + C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve matricialmente la ecuación:

$$A \cdot X - C \cdot X = 2C$$

23. (P.A.U.) Resuelve las ecuaciones matriciales siguientes:

a) $AX - B + C = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XA - 2B + 3C = D$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

24. Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix})$$

25. Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix})$$

26. Madrid 2023 Opción B

Problema 23.2.1 (2,5 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.
- (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC .
- (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

27. Andalucía 2023 Opción B

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [0,5 puntos] Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A ?
b) [2 puntos] Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

28. Madrid Junio 2022 – Opción B

Problema 22.6.1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.
b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a , b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

29. Junio 2017/18

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ punto})$$

- b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. (1 punto)
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. (0,5 puntos)

30. Septiembre 2017/18

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. (1,25 puntos)
b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. (1,25 puntos)

31. Junio 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. (1,5 puntos)

32. Septiembre 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente A^{-1} . (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. (1,5 puntos)

33. PAEG JUNIO 2010 3B.

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$

Determina los valores a ; b ; $c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2,5 puntos) (Sol.: $(a, b, c) = (1, -2, 4)$)

34. PAEG JUNIO 2011 - 3A

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide :

- a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$
b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (Sol.: $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; b) $B^n = I$ si n es par; $B^n = B$ si n es impar)

35. JUNIO 2008

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Encuentra la expresión general de la potencia n -ésima de A . En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa. (NO)

(Sol.: a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $r(A) = 3$)

36. SEPT. 2007

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2 . (NO)

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2

(Sol.: b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$)

37. PAEG SEPTIEMBRE 2016 3A

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$?

(0,5 puntos)

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$ (1 punto)

c) Calcula la matriz X (1 punto) (Sol.: a) X del orden 2×3 ; b) $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$; c) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)

38. PAEG JUNIO 2016 3B Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10, \text{ donde } x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ calcula los determinantes}$$

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu}$$

respuesta. (1,25 puntos por determinante)

(Sol.: a) 14; b) -150)

39. PAEG SEPTIEMBRE 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3 (1 punto)

b) Calcula X , siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 punto)

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000} (0,5 puntos)

(Sol.: a) $X = 2A + I$; b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $|A| = -1$; $|A^{101}| = |A|^{101} = (-1)^{101} = -1$; $|A^{1000}| = 1$)

40. PAEG JUNIO 2014

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^T|$, $|A^3|$ (1 punto)

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (1,5 \text{ puntos}) \quad (\text{Sol.: a) } 5, 1/5, 5, 125; \text{ b) } -6, -800)$$

41. PAEG JUNIO 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1 punto)

b) Calcula X, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

(Sol.: a) $X = B(I - A)^{-1}$; b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$)

42. PAEG SEPTIEMBRE 2014 3B

Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean soluciones del sistema matricial

$$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases} \quad \text{siendo } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Sol.: } A = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix})$$

43. PAEG SEPTIEMBRE 2014 3A

a) Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

b) ¿Para qué del parámetro $m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A? (0,5 puntos)

(Sol.: a) $m \neq 0, 6$ $R = 3$; $m = 0$ $m = 6$, $R = 2$; b) $m \neq 0, 6$ existe A^{-1})

UNIDAD 5. SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones. Dado sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de las incógnitas:

Matriz de los términos independientes:

El sistema se puede expresar como $A \cdot X = B$

Si $B=0$ se dice que el sistema es **homogéneo**.

Si algún $b_i \neq 0$, se dice **no homogéneo**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. Tipos de sistemas según su solución

- **Sistema Compatible Determinado (SCD)**. Tiene una única solución.

- **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**. Tiene infinitas soluciones.

- **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene ninguna solución.

3. Métodos para resolver un sistema

1) **Método de Gauss**. Transformar el sistema en otro sistema escalonado equivalente.

2) **Método matricial, cuando A es cuadrada**.

Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ Existe $A^{-1} \rightarrow A \cdot X = B \rightarrow$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

3) **Regla de Cramer para SCD**.

$$x = \frac{|B \quad C_2 \quad C_3|}{|A|} \quad y = \frac{|C_1 \quad B \quad C_3|}{|A|} \quad z = \frac{|C_1 \quad C_2 \quad B|}{|A|}$$

4. Teorema de Rouché-Frobenius. Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, siendo A la matriz de coeficientes y $A^*=(A|B)$ la matriz ampliada, se cumple:

$$\text{rag}(A) = \text{rag}(A^*) = n \text{ (nº incógnitas)} \rightarrow \text{SCD (1 solución)}$$

$$\text{rag}(A) = \text{rag}(A^*) < n \text{ (nº incógnitas)} \rightarrow \text{SCI (infinitas soluciones)}$$

$$\text{rag}(A) \neq \text{rag}(A^*) \rightarrow \text{SI (1 no tiene solución)}$$

5. Discusión de un sistema en función de un valor k .

1) Estudiamos el $\text{rag}(A)$. Para ello vemos cuando $|A|=0 \rightarrow$ Obteniendo valores a, b, c donde vale 0.

2) Si $k \neq a, b, c \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rag}(A)=\text{rag}(A^*)=n \rightarrow \text{SCD (1 solución)} \rightarrow$ Resolver por Cramer sin sustituir k .

3) Si $k=a \rightarrow$ Estudiar $\text{rag}(A)$ que es $< n$ y $\text{rag}(A^*)$ y aplicar el T.Rouché-Frobenius.

Si $k=b \rightarrow$ Idem, Si $k=c \rightarrow$ Idem ...

Sistemas ecuaciones	
D2. Modelo matemático	D2.2. Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
D3. Igualdad y desigualdad	D3.1. Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales. D3.2. Resolución de sistemas de ecuaciones en diferentes contextos.
D5. Pensamiento computacional	D5.1. Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología empleando las herramientas o los programas más adecuados. D5.2. Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

TEORÍA: Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.

TEORÍA: Tipos de sistemas según su solución

TEORÍA: Métodos para resolver un sistema.

Ejercicios

- Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$
- Resuelve por el método matricial el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ x - y + z = -2 \end{cases} \quad S: (1, 2, -1)$$
- Analiza si el siguiente sistemas de ecuaciones e de Cramer y, en su caso, resuélvelo:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 13 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \quad (S: (4, 1, 2))$$

TEORÍA: Teorema de Rouche- Frobenius.

TEORÍA: Discusión de un sistema en función de un valor k.

Ejercicios

4. Discute en función del parámetro m el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } m \neq -8, \text{ solución trivial; si } m = -8, \text{ S.C. Indeterminado})$$

5. Estudia el sistema dependiente del parámetro a , $\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ x + y + (a - 1)z = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$. Resuélvelo, aplicando la regla de Cramer, en el caso $a = 0$.

(S: $a \neq 1$ y $a \neq 2$ $r(A) = 3$ y $r(A^*) = 3$. El sistema es C. Deter.

$a = 1$ y $a = 2$ $r(A) = 2$ y $r(A^*) = 3$. El sistema es Incomp.

Para $a = 0$, sistema de cramer y la solución es $(1/2, 0, 1/2)$)

6. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

(Sol.: a) Si $m = 7$ Sistema compatible determinado.; Si $m \neq 7$ Sistema incompatible. Solución: $(1, 1)$

b) Si $m = -1$ Sistema compatible indeterminado. $(1 - k, -1 - 7k, 3k)$ // Si $m \neq -1$ Sistema incompatible.)

7. Junio 2024/25

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

8. Julio 2024/25

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$.

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

9. Junio 2023/24

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:
- $$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

- a) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

10. Julio 2023/24

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.
- a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.
- b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

11. Modelo 1 – Curso 2023/24

1. En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).
- a) **[1,75 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de t .
- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.

12. Modelo 2 – Curso 2023/24

1. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda.
- a) **[1,25 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permita determinar cuánto vale un lápiz, un cuaderno y una agenda.
- b) **[1,25 puntos]** ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50? En caso de que se pueda, obtén los precios correspondientes. En caso de que no se puede, justifica por qué no.

13. Modelo 1 - Curso 2022/23

1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}.$$

- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

14. Modelo 2 - Curso 2022/23

2. En la liga de fútbol profesional de Libertonía compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con el número de centrocampistas menos el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas.

- a) **[1,5 puntos]** Escribe el sistema de ecuaciones lineales necesario para calcular el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.
- b) **[1 punto]** Explica razonadamente cuántas soluciones tiene este sistema. Obtén la solución (o soluciones) del mismo.

15. Junio 2021/22

2. a) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

16. Julio 2021/22

1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a + 1 \\ ax + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}.$$

- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

17. Junio 2020/21

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ a \cdot x + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}.$$

- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

18. Julio 2020/21

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

19. Junio 2019/20

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

20. Julio 2019/20

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

21. Junio 2018/19

- 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} ax + 2y &= a^2 \\ -x + y + z &= 5 \\ x - ay - z &= -(4 + a) \end{aligned} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

- b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. (1 punto)

22. Julio 2018/19

- 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} x - (a - 2)y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= -4 \\ x - 3y + az &= -a^2 \end{aligned} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

- b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. (1 punto)

Otros ejercicios propuestos:

Método de Gauss

1. Clasifica y resuelve, si es posible, por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases} \end{array}$$

(Sol.: a) C.D. *Solución:* $x = 1, y = -2, z = 3$; b) S.I. ; c) C. I, *Soluciones:* $x = -3 + 2t, y = t, z = -2 + t$)

2. Resuelve por el método de Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} \end{array}$$

(Sol.: a) $(3, -2, 0)$; b) $(-t/2, -t/2, t)$; c) $(-1 - 3t, 2 + 4t, t)$; d) $(-1, 1, -2)$)

Método matricial

3. Expresa en forma matricial y resuelve:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

4. Resuelve por el método matricial:

$$\text{a)} \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

(Sol.: a) $(3/2, -1/2, 0)$; b) $(1, 1, -1)$)

Regla de Cramer

5. Analiza si los siguientes sistemas de ecuaciones son de Cramer y, en su caso, resuélvelos:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -3 \end{cases} \quad (\text{S: } (1, 2, 2)) \quad \text{b)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{S: } (1/2, 1/2, 0))$$

6. Resuelve por el método de Cramer, si es posible:

$$\text{a)} \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

(Sol.: a) $(3/2, -1/2, 0)$; b) $(1, 1, -1)$)

Discusión de sistemas. Teorema de Rouche-Frobeniüs

7. Discute y resuelve los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x - y - 2z = 0 \\ \text{b) } x + y + z = 5 \\ 4x - 5y + az = -10 \end{matrix}$$

(Sol: a) $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $r(A) = r(A^*) = 3$ y el sistema C. Deter.

$a = 1$ $r(A) = 2$ y $r(A^*) = 3$ y el sistema Incomp.

$a = -1$ $r(A) = 2 = r(A^*)$ y el sistema C. Indeter. $(-3/2, 5/2 - t, t)$

b) $a \neq -3/8$ C. Deter. $a = -3/8$ C. Indeter.)

8. Discute el sistema siguiente, según los valores de a, y resuelve en su caso:

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

(Sol.: $a \neq 0$ y $a \neq -1$ C. Deter. $(0, 0, 0)$; $a = 0$ C. Indeter. $(t, -t, t)$; $a = -1$ C. Indeter. $(0, -t, t)$)

9. Junio - Andalucía 2025

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

10. Julio – Andalucía 2025

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

11. Julio – Castilla y León 2025

Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$.

(1,5 puntos)

12. Junio – Cantabria 2025

Cuestión 1B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Tarea a. [1,5 puntos]. Halla los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

13. Julio Cantabria 2025

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ (a-1)x - 3z = 2 \\ y + (a^2 + a + 1)z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.
- [0,5 puntos] Considera $a = -1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

14. Junio - Asturias 2025

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

- (0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 para alimentación y 225 para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.
- (0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

15. Julio Asturias 2025

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 punto)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

16. Junio - Cataluña 2025

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} y - z = p + 3 \\ p^2 x - z = 5 \\ x - y = 3 \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p . [1.25 puntos]
- b) Resuelva el sistema para el caso $p = -1$. [0,5 puntos]
- c) Para el caso $p = -1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy = 10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntruelas todas. [0,75 puntos]

17. Junio - Baleares 2025

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x + y - z = 40$ €,

Producto 2: $x - y + 2z = 90$ €,

Producto 3: $x + 2y = 70$ €,

Producto 4: $x - y + z = 50$ €.

- (a) **[0.5 puntos]** Describe qué significa la ecuación del producto 1.
- (b) **[2 puntos]** Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

18. Julio – Baleares 2025

Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

- (a) [1 punto] ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.
- (b) [1.5 puntos] Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

19. Julio – Canarias 2025

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2.5

20. Junio 2025 – Madrid

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

21. Julio – Madrid 2025

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

22. Junio – Murcia 2025

- 1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.
- [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
 - [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
 - [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

23. Junio – Navarra 2025

- A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9 \\ (3m - m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

24. Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

25. Madrid 2022 Extraordinaria – Opción B

Problema 22.10.1 (2,5 puntos) Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

26. Junio 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 3y - az & = & 4 \\ x + ay + z & = & 2 \\ x + 4y - 5z & = & 6 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. (1 punto)

27. Septiembre 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & -4 \\ x - 4y - 3z & = & a^2 - 3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. (1 punto)

28. Junio 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} ax - y + z & = & a - 4 \\ 2x + y - az & = & a - 1 \\ y - z & = & -3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

29. Septiembre 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 0 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. (1 punto)

30. PAEG SEPTIEMBRE 2016 3B

a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius (0,5 puntos)

b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser C. Determinado (

c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y - z + 2t & = & 2 \\ 5x + y + 2z & = & 1 \\ x + 8y - 5z + 6t & = & a \end{array} \right. \text{ es incompatible (1,5 puntos)}$$

31. PAEG JUNIO 2016 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + mz & = & 0 \\ 4x - 3y + 2z & = & m \\ -mx + y - z & = & 1 - m \end{array} \right. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

(Sol.: a) $m \neq 1$ SCD; $m = 1$ SCI; b) $(x, y, z) = (1 + \mu, 1+2\mu, \mu)$

32. PAEG SEPTIEMBRE 2015 3A.

a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius. (0,5 puntos)

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - az = 5 \end{cases}$$
 no es incompatible para ningún

valor $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

(Sol.: a) Teorema de Rouché-Frobenius Un sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada A/B; es decir: S es compatible $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B)$; b) $a \neq 2$ SCD; si $a = 2$ SCI; Sistema Compatible $\forall a \in \mathbb{R}$)

33. PAEG JUNIO 2015

He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como $100x + 10y + z$. (1,5 puntos)

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. (1 punto)

(Sol.: b) SCD c) 543)

34. PAEG JUNIO 2014

a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 5y + az = 4 \end{cases}$$
 con $a \in \mathbb{R}$ es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para

dicho valor del parámetro (2 puntos)

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$ (0,5 puntos)

(Sol.: a) Si $a = 8$ SCI $(4 + \mu, 5\mu; 3\mu)$; b) $\mu=1$ $(5, 5, 3)$ y si $\mu = 3$ $(5, 5, 3)$)

35. PAEG RESERVA-2013 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

(Sol.: a) Si $m = 6$; SCD; $m \neq 6$ SI; b) $m = 6$ SCD $(5, 4, 2)$

36. PAEG-RESERVA-2013

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -4x - 2y + mz &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

- a) Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? (0,5 puntos)
- b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. (1 punto)
- c) Resuelve el sistema para todos los valores de m de $\mathbb{R}$. (1 punto)
- (Sol.: a) Nunca puede ser incompatible. B) Si no tiene solución trivial $\text{SCI } R(A) \leq 2$, si $m = -1$ SCI , $(-3\mu, 5\mu, 2\mu)$; c) $m \neq -1$, SCD y tiene la solución trivial)

37. PAEG-SEPTIEMBRE-2013 3B

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} x + y - 5z &= -1 \\ 2x - y - 3z &= 1 - m \\ x - 2y + 2z &= m \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado (1 punto)

38. PAEG JUNIO-2012 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ mx + (m+1)y + (m-1)z &= m-2 \\ 3x + (m+3)y + 4z &= m-2 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

UNIDAD 6. Vectores. Puntos, rectas y planos en el espacio.

1. Vector en el espacio.

- Llamaremos **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado de origen A y extremo B
- Diremos que 2 vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.
- Llamaremos **vector libre** $\vec{v}$ al conjunto de todos los vectores equipolentes.
- Las **coordenadas del vector** $\overrightarrow{AB}$ se calculan haciendo $B-A = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$.



2. Vectores L.Dep/Independientes.

- Un vector $\vec{w}$ se dice que es **C.Lineal** de un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ si es posible encontrar números reales $k_1, k_2, \dots, k_n$ tal que $k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n = 0$.
- Un conjunto de vectores son **L.Dependientes** si cualquier de ellos se puede poner como C.Lineal de los demás.
- Un conjunto de vectores son **L.Independientes** si ninguno se puede expresar como C.Lineal de los demás.

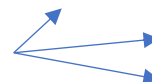
¿Cómo saber cuales son L.Independientes?

Para determinar la dependencia lineal de un grupo de vectores, los colocamos como filas de una matriz A. El rango de esa matriz es el número de vectores L.Independientes.

Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ Son todos L.Independientes.

Observación:

- Tres vectores son L.Dependientes si son paralelos (están en el mismo plano: coplanarios).
- Tres vectores son L.Independientes si están en planos distintos.

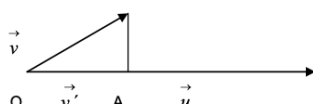


3. Base en el espacio. Coordenadas de un vector

- Una **base en el espacio** es un conjunto de 3 vectores L.Independientes entre sí de forma que cualquier vector se puede expresar como C.Lineal de ellos.
- Si 3 vectores son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**. Si además tienen módulo 1 forman una **base ortonormal**.
- La **base canónica** es $\vec{i}(1,0,1), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$
- Dada la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, cualquier vector $\vec{p}$ se expresa de forma única como $\vec{p} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Diremos que (a,b,c) son las **coordenadas de $\vec{p}$ respecto a esa base**.

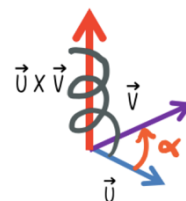
4. Producto escalar.

- Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u,v})$
- Expresión analítica $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- Módulo de $\vec{u} \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- Ángulo de 2 vectores $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- Interpretación geométrica del producto escalar: Producto escalar es el producto del módulo de un vector por el módulo de la proyección del otro $\vec{v}'$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



5. Producto vectorial.

- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de sentido igual al avance de un sacacorchos al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ y de módulo $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\widehat{u,v})$.

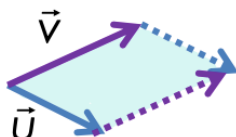


- Expresión analítica:

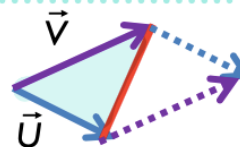
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

6. Aplicaciones del producto vectorial. Propiedades.

$$\text{Área de un paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



$$\text{Área de un triángulo} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$



Propiedades

- 1) $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = 0 \text{ ó } \vec{v} = 0 \text{ ó } \vec{u} = k\vec{v}$ (paralelos) // 2) Anticonmutativa $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ // 3) Distributiva
- 4) $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$ // 5) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{u} \times \vec{v}$

7. Producto mixto.

Producto mixto a $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

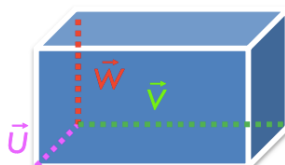
$$\text{Expr. analítica } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

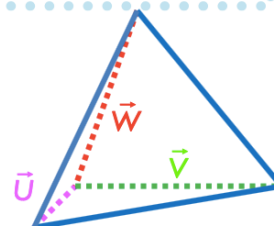
- 1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ (Propiedad Deter)
- 2) 3 vectores L.Dep (coplanarios) $\rightarrow$ su producto mixto es 0.

Interpretación geométrica:

$$\text{VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO} \\ |\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$$



$$\text{VOLUMEN DE UN TETRAEDRO} \\ \frac{|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|}{6}$$



8. Ecuaciones de la recta en el espacio.

Punto $A(x_0, y_0, z_0)$

Vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

Si no tienes el vector, con dos puntos de la recta puedes hallarlo $\vec{AB}$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad t \in \mathbb{R}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Igualdad de vectores

PARA OBTENER PUNTOS DE LA RECTA BASTA CON QUE DES VALORES A LA t

ECUACIÓN CONTINUA
$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

Despejo t e igualo

Tres puntos A, B y C están alineados si $\text{rag}(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1$

ECUACIÓN IMPLÍCITA
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

Igualo dos a dos para obtener las dos ecuaciones

RESUELVE EL SISTEMA PARA HALLAR PUNTOS DE LA RECTA (RECUERDA QUE ES S.C.I. — 1 PARÁMETRO)

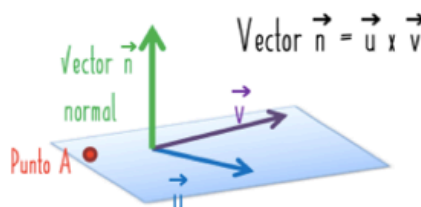
9. Ecuaciones del plano en el espacio.

Punto A (x_0, y_0, z_0)

Dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3) + s \cdot (v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{cases}$$



ECUACIÓN IMPLÍCITA
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$Ax + By + Cz = D$
Vector $\vec{n} = (A, B, C)$

Ecuación conocido punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y vector normal $\vec{n}(a, b, c)$
 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

Obs: 4 puntos A, B, C y D coplanarios $\rightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$

10. Posición relativa de 2 rectas el espacio.

- Posibles posiciones: Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan



- Estudio mediante vectores directores y puntos que las determinan. $r: \langle A, \vec{u} \rangle$, $s: \langle B, \vec{v} \rangle$

I. Si $\vec{u} // \vec{v} \rightarrow$ Coincidentes (si A pertenece a s) y paralelas (si A no pertenece a s)

II. Si $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v} \rightarrow$ Se cortan si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son L.Dep $\rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$

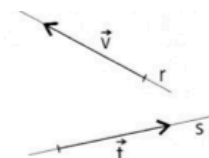
Se cruzan si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$

- Estudio con los rangos a partir de vectores directores y puntos

$$r: \langle A, \vec{u} \rangle, s: \langle B, \vec{v} \rangle \rightarrow M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad M/N = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a_1 - b_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 - b_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(M) = 2 \quad \text{y} \quad \text{rang}(M/N) = 3$$

Las rectas se cruzan.



$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

Las rectas se cortan en un punto.



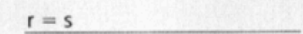
$$\text{rang}(M) = 1 \quad \text{y} \quad \text{rang}(M/N) = 2$$

Las rectas son paralelas.



$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Las rectas son coincidentes.



- Estudio con rangos con rectas con ecuación en forma implícita

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

I. Si $\text{rag}(M)=3$ y $\text{rag}(A)=4 \rightarrow$ SI (S. Incompatible) - Se cruzan

II. Si $\text{rag}(M)=3=\text{rag}(A) \rightarrow$ SCD (S. Compatible Determinado) - Secantes

III. Si $\text{rag}(M)=2$ y $\text{rag}(A)=3 \rightarrow$ SI (S. Incompatible) - Paralelas

IV. Si $\text{rag}(M)=2=\text{rag}(A) \rightarrow$ SCI (S. Compatible Indeterminado) - Coincidentes

11. Posición relativa de 2 planos en el espacio.

- Estudio mediante vectores normales. $\Pi_1: \langle A, \vec{n}_1 \rangle$, $\Pi_2: \langle B, \vec{n}_2 \rangle$

I. Si $\vec{n}_1 // \vec{n}_2 \rightarrow$ Coincidentes (si A pertenece a Π_2) y paralelos (si A no pertenece a Π_2)

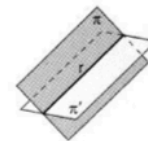
II. Si $\vec{n}_1$ no es paralelo a $\vec{n}_2 \rightarrow$ Se cortan en una recta.

- Estudio con los rangos a partir de las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi: A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array} \right)$$

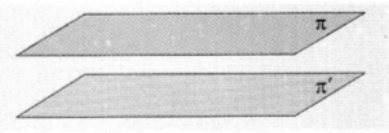
$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

Los dos planos se cortan en una recta.



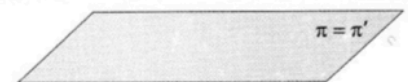
$$\text{rang}(M) = 1 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 2$$

Los dos planos son paralelos.



$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Los dos planos son coincidentes.

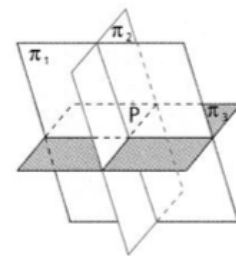


12. Posición relativa de 3 planos en el espacio. Ecuaciones en forma implícita

$$\begin{cases} \pi_1: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2: A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3: A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \quad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right)$$

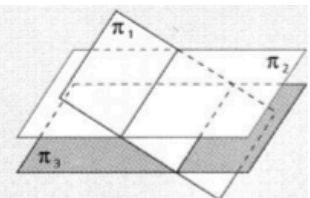
$$\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}(M/N)$$

Los tres planos se cortan en un punto.

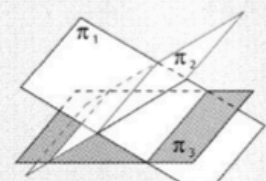


Dos planos son paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas.

$$\text{rang}(M) = 2 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 3$$



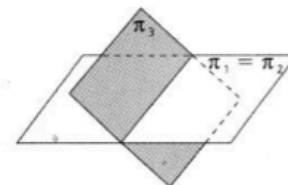
Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.



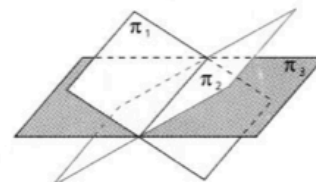
12. Continuación ... (Posición relativa de 3 planos en el espacio)

$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

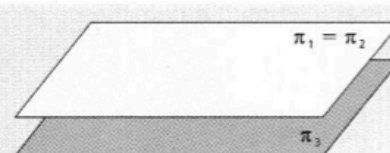


Los tres planos se cortan en una recta

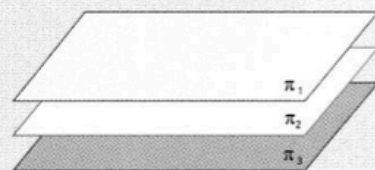


$$\text{rang}(M) = 1 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 2$$

Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo.

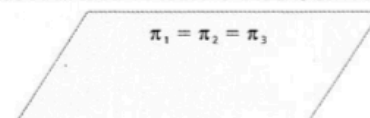


Los tres planos son paralelos.



$$\text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M/N)$$

Los tres planos son coincidentes.



13. Posición relativa de recta y plano.

- Estudio con $\vec{d}$ vector director de la recta y $\vec{n}$ vector normal plano. Si $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares y por tanto, son coincidentes o paralelas (falta ver un punto de una en la otra). Si $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0 \rightarrow$ Secantes.

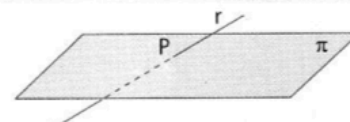
- Estudio con rangos con ambas ecuaciones expresadas en forma implícita.

$$\begin{aligned} \pi: Ax + By + Cz + D &= 0 \\ r: \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right)$$

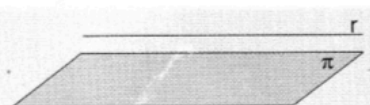
$$\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}(M/N)$$

La recta y el plano se cortan en un punto.



$$\text{rang}(M) = 2 \text{ y } \text{rang}(M/N) = 3$$

La recta y el plano son paralelos.



$$\text{rang}(M) = 2 = \text{rang}(M/N)$$

La recta está contenida en el plano.



14. Haz de planos.

- Haz de planos paralelos. La ecuación del haz de planos paralelos a uno dado $p : Ax + By + Cz + D = 0$ es de la forma $Ax + By + Cz + K = 0$. Para determinar K , necesitamos un punto del plano del haz, que sustituiremos en la ecuación del plano del haz.

- Haz de planos secantes en una recta.

Sea la recta $r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

El haz de planos que se cortan en la recta r tiene la siguiente expresión:

$$\alpha (Ax + By + Cz + D) + \beta (A'x + B'y + C'z + D') = 0, \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \text{ números reales.}$$

La ecuación del haz engloba al conjunto de planos que se cortan en r .

Saberes de Geometría	
A1. Sentido de las operaciones	A1.1. Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades. A1.2. Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
A2. Relaciones	A2.1. Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
B1. Medición	B1.1. Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
C1. Formas geométricas de 2 y 3 dimens.	C1.1. Objetos geométricos de tres dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. C1.2. Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados con coordenadas cartesianas.
C2. Localización y sistemas de representación	C2.1. Relaciones de objetos geométricos en el espacio: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales. C2.2. Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.
C3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.	C3.1. Representación de objetos geométricos en el espacio mediante herramientas digitales. C3.2. Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos y otros) para resolver problemas en el espacio. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés. C3.3. Conjeturas geométricas en el espacio: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas. C3.4. Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el espacio utilizando vectores.

TEORÍA: Vector en el espacio.

TEORÍA: Vectores L. Dependientes / L. Independientes.

TEORÍA: Base

Ejercicios

1. Sea la base $B = \vec{u}(1,0,1); \vec{v}(1,1,0); \vec{w}(0,1,1)$. Expresa el vector $\vec{p}(-1, -4, 1)$ como combinación lineal de los vectores de la base B, es decir las componentes del vector $\vec{p}$ respecto a dicha base. (Sol.: $k_1 = 2, k_2 = -3, k_3 = -1$, y las componente del vector $\vec{p}$ respecto la base B es $(2, -3, -1)$)

2. Comprobar si los conjuntos de vectores siguientes son L.I. o L.D. :

a) $(2, 1, 3), (-3, -1, 2)$ y $(0, 1, -1)$

b) $(0, 0, -1), (-2, -1, 0)$ y $(-3, 0, 1)$ (Sol.: $r = 3$, por lo tanto son L.I.)

3. Determina el número máximo de vectores linealmente independientes entre los siguientes, y elige vectores que los sean: $(1, 2, 3), (0, 1, -2), (1, 3, 0), (0, 2, -4)$ (Sol.: Calcula el rango, tres vectores)

4. Hallar el valor del parámetro “a” para que los vectores $(-2, 1, a)$ $(3, 2, -1)$ y $(1, 0, -a)$ sean linealmente dependientes. (Sol.: $a = 1/5$)

5. Determina el valor de “a” para que los puntos estén alineados:

a) $A(1, a, 2), B(3, 0, 1)$ y $C(0, -2, a)$.

b) $A(1, -4, -1), B(-3, 0, -1)$ y $C(a, -2, a)$

(Sol.: Comprobar si los dos vectores pueden ser proporcionales, a) no están alineados, b) $a = -1$)

6. Determinar el valor de “a” para que los puntos $A(-a, 0, 4)$ $B(1, -3, 5)$ $C(3, 2, 0)$ y $D(0, -7, 8)$ sean coplanarios

(Sol.: Los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ deben ser l.d.; $a = -1$)

7. Modelo examen – Curso 2022/23

5. a) **[1,25 puntos]** Sean los puntos $A = (1, 0, -1), B = (2, 3, 0)$ y $C = (a, b, 1)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Obtén el valor de a y b para que los tres puntos estén alineados.

TEORÍA: Producto escalar

Ejercicios

8. Dados los vectores $\vec{u} (3, -4, 12)$ y $\vec{v} (5, -2, -6)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) el ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$

d) Proyec. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y Proyec. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector $(7, x, -2)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

(Sol.: a) -49; b) 13 y 8,06; c) $117^\circ 52'$; d) -6,077 y -3,769; e) $x = -\frac{3}{4}$)

9. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados: $\vec{u} (3, -1, 2)$ y $\vec{v} (1, 0, 3)$ (Sol.: $(3, 7, -1)$)

TEORÍA: Producto vectorial

Ejercicios

10. Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, -5, 1)$ y $\vec{v}(4, 7, 6)$. Comprobar que el producto vectorial es perpendicular a cada uno de los vectores. (Sol.: $(-37, -14, 41)$)

11. Halla el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$ y $\vec{v}(4, 7, 6)$ (Sol.: $28,49 \text{ u}^2$)

12. Hallar el área del triángulo de vértices $A(-5, 2, 1)$, $B(1, 7, 5)$ y $C(-1, 0, 4)$ ($A = 19,73 \text{ u}^2$)

13. Hallar el valor de “a” para que al efectuar el producto vectorial de $u = (1, 2, a)$ y $v = (a, 3, 1)$ obtengamos el vector $w = (-4, 3, -1)$. (Sol.: $a = 2$)

14. Modelo examen – Curso 2022/23

4.

b) [1,5 puntos] Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

TEORÍA: Producto mixto

Ejercicios

15. Halla el volumen del paralelepípedo definido por : $\vec{u}(-5, 1, 7)$, $\vec{v}(4, 7, 3)$ y $\vec{w}(1, 0, 4)$ (Sol.: 202 u^3)

16. Halla el volumen del tetraedro que determinan: $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, -1, 3)$ y $\vec{w}(5, 2, 1)$ (Sol.: $17/6 \text{ u}^3$)

17. Hallar el volumen del tetraedro de vértices $A(3, 5, 7)$, $B(1, 0, -1)$, $C(7, -1, 4)$ y $D(11, 4, -6)$ (Sol.: 107 u^3)

18. Julio 2024/25

b.2) [1,5 puntos] Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 0, -1)$, $C(2, -1, 1)$ y $D(2, 3, m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

19. Julio 2021/22

6. a) [1,5 puntos] Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

TEORÍA: Ecuaciones de la recta en el espacio

Ejercicios

20. Obtener las ecuaciones (paramétricas, continuas e implícitas) de la recta que pasa por $P(1, -1, 0)$ y es paralela al vector $\vec{d}(1, -1, 2)$ (Sol.: $x = 1 + t$; $y = -1 - t$; $z = 2t$)
21. Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 0, 3)$. Localiza dos puntos, además de los dados.
(Sol.: $r: x + y - 2 = 0, 2x - z - 1 = 0$)
22. Halla las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pasa por cada par de puntos:
a) $A(3, 0, -7)$ y $B(-7, 2, -1)$ b) $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 0, 0)$

23. Poner en forma implícita las rectas siguientes:

a) $r: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -5 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ b) $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-1}$

24. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $r: \begin{cases} 3x-5y+7z-4 = 0 \\ x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$ por $P(0, -1, -3)$

Observación: El vector dirección de la recta r es $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

25. Calcular la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto $A(1, -1, 2)$ y que tiene dirección perpendicular a los vectores $u(0, 1, 3)$ y $v(1, 1, 1)$ (Sol.: el vector dirección de la recta es el producto vectorial de u y v , $u \times v = (-2, 3, -1)$)

26. Halla unas ecuaciones paramétricas y continuas para la recta de ecuaciones implícitas:

a) $r: \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-y+z = 0 \end{cases}$ b) $s: \begin{cases} 2x-2y-z = 0 \\ x+y+z-3 = 0 \end{cases}$

(Sol.: Resolviendo los sistemas se obtiene las ecuaciones paramétricas de la recta: $r(x = \alpha, y = -\alpha, z = -3\alpha)$; $s(x = 1 - \mu, y = 1 - 4\mu, z = 1 + 5\mu)$)

27. Junio 2023/24

3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.

- [1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
- [0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?
- [1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

28. Junio 2022/23

- [1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

29. Modelo examen – Curso 2022/23

- [1,25 puntos]** Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$.

30. Junio 2017/18

- 4B.** Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (2, 0, 3)$:
- Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda \vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
 - ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
 - Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

TEORÍA: Ecuaciones del plano en el espacio

Ejercicios

31. a) Determina las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(2, 3, 5)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(3, 6, 10)$
b) Halla otros tres puntos del plano
(Sol.: a) $x - 2y + z - 1 = 0$, c) $n = 4$)
c) Calcula n para que $P(1, 2, n)$ pertenezca al plano.
32. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(2, 3, 5)$ y es paralelo a los vectores $u(-1, -2, -3)$ y $v(1, 3, 5)$
(Sol.: $x - 2y + z - 1 = 0$)
33. Determina las ecuaciones paramétricas del plano $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$

34. Halla la ecuación implícita de cada uno de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto A(1, -3, 2) y por los vectores u (2, 1, 0) y v(-1, 0, 3)

b) Pasa por el punto P(2, -3, 1) y su vector normal es u(5, -3, -4)

c) perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1, 0, 1)

(Sol.: a) $3x - 6y + z - 23 = 0$; b) $5x - 3y - 4z - 15 = 0$; c) $2x - y + 3z - 5 = 0$)

35. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1) y contiene a la recta de ecuación

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1} \quad (\text{Sol.: } 4x - 3y + 5z - 13 = 0)$$

36. Halla la ecuación de un plano que contiene a las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \text{ y } s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{4} \quad (\text{Sol.: } 18x + 15y - 21z + 33 = 0)$$

37. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P (0, 1, 1) y es perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ (Sol.: $x - y + 3z - 2 = 0$)

38. Estudia la posición de las siguientes rectas y halla, si es posible, el plano que las contiene:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2} \quad (\text{Sol.: } r//s \text{ y el plano } 2x - z - 4 = 0)$$

39. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas $r: x - 1 = y - 2 = z - 3$ y $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

(Sol.: $2x - y - z + 3 = 0$)

40. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π , siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } -4x - 3y + z + 8 = 0)$$

41. Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a las recta s.

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases} \quad (\text{El vector normal al plano } \pi = \vec{d}_r \times \vec{d}_s)$$

42. Junio 2024/25

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto A(0, 0, 0).

43. Junio 2024/25

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

44. Julio 2024/25

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) [1 punto] Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

45. Julio 2024/25

b.1) [1 punto] Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.

46. Julio 2023/24

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que define el toldo.

47. Junio 2022/23

3. Sean el punto $A(1,1,a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1,2,0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A .

48. Junio 2021/22

5. a) [1 punto] Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

49. Junio 2021/22

7. a) [1,25 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

50. Julio 2021/22

4. Sea el punto $A = (1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

a) [1,5 puntos] Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A . ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

51. Julio 2021/22

5. a) [1 punto] Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B .

52. Junio 2020/21

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.
- [1,25 puntos] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
 - [1,25 punto] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .

TEORÍA: Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio

Ejercicios

53. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s :

$$a) \ r: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2+\mu \\ y = 1-2\mu \\ z = -1-\mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r \text{ y } s \text{ son paralelas})$$

$$b) \ r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r \text{ y } s \text{ se cruzan})$$

$$c) \ r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \quad (\text{Sol.: se cortan en el punto } (-13, 28, 5))$$

54. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

$$a) \ r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3} \quad (\text{Se cruzan})$$

$$b) \ r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad s: \begin{cases} x-2y-1 = 0 \\ 3y-z+1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Paralelas})$$

$$c) \ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \quad s: \begin{cases} x = 3+4\mu \\ y = 3+6\mu \\ z = 4+8\mu \end{cases} \quad (\text{Coinciden})$$

$$d) \ r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \quad (\text{Se cortan en el punto } (0, 3, 3))$$

55. Junio 2021/22

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases},$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a .

b) [1 punto] Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r .

56. Junio 2020/21

$$b) \ [1,25 \text{ puntos}] \text{ Sean las rectas } s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases} \text{ y } t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}. \text{ Calcula}$$

razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

TEORÍA: Posición relativa de 2 planos en el espacio

Ejercicios

57. Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a) $\pi : x - 2y + x - 1 = 0$ $\pi' : 2x - 4y + 3z - 2 = 0$ // b) $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ $\pi' : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$

c) $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ $\pi' : -3x + 6y - 3z + 3 = 0$

58. Calcular los valores de a y b para que sean paralelos los planos:

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0 \quad \pi' : ax - 4y + 2z + b = 0$$

59. Julio 2020/21

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

a) [1 punto] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

TEORÍA: Posición relativa de 3 planos en el espacio.

Ejercicios

60. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi : x + 2y - 2z + 3 = 0 \quad , \quad \pi' : 2x - y + 3z + 1 = 0 \quad , \quad \pi'' : -2x - 4y + 4z - 6 = 0$$

(Sol.: dos planos coincidentes y el otro los corta en una recta)

61. Junio 2021/22

6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m . Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

62. Discutir la posición relativa de los planos, según los valores del parámetro k :

a) $\pi : x + y + kz = 1$; $\pi' : kx + y + z = 1$; $\pi'' : 2x + y + z = k$

(Sol: $k = 1$, los tres planos se cortan en una recta, $k = 2$ dos planos paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas, $k \neq 1, 2$ los tres planos se cortan en un punto)

b) $\pi : kx - 2y + z - 1 = 0$; $\pi' : x - 2ky + kz - 3 = 0$; $\pi'' : x - 4y + kz - k = 0$

63. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\pi : x - y + 2z = 1$; $\pi' : 2x + 2y - z = 2$; $\pi'' : 3x + 5y - 4z = 3$

b) $\pi : x + y - z = 1$; $\pi' : x - y + z = 2$; $\pi'' : -x + y + z = 1$

c) $\pi : x + y + z = 1$; $\pi' : x - 2y + z = 0$; $\pi'' : 2x - y + 2z = 0$

TEORÍA: Posiciones relativas de recta y plano en el espacio

Ejercicios

64. Estudiar la posición relativa del plano π y la recta r :

a) $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ (Sol.: la recta contenida en el plano)

b) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$ $\pi : x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 - 4\lambda \end{cases}$ (Sol.: r y π son paralelos)

65. Junio 2022/23

8. a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A .

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3 . El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

66. Modelo examen - Curso 2022/23

3. Dada la recta $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente la posición relativa de la recta r y el plano π .

b) [1,25 puntos] Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r .

67. Determina b para que la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ no corte al plano $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$
68. Determina los valores de a para que el plano $\pi: x - 2y + az = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ se corten en un punto.
69. Determina b para que la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ no corte al plano $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$ (Sol.: $b = 9$)
70. Dado el plano $\pi: x + y + mz = n$ y la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$.
- Calcula m y n para que π contenga a r . (Sol.: $m = 0$)
 - Calcula m y n para que π y r sean paralelos. (Sol.: $m = 0$ y $n \neq 2$)
 - Calcula m y n para que π y r sean secantes. (Sol.: $m \neq 0$)

TEORÍA: Haz de planos



Ejercicios

71. Halla la ecuación del haz de planos que tiene por eje o arista la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \text{ y calcula, el que pasa por el punto } P(1,1,1) \text{ (Sol.: } x - 2y + z = 0 \text{)}$$

72. a) Determina la ecuación del haz de planos que cortan a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$

b) Halla el plano del haz que pasa por el punto $A(1, 0, 3)$

73. Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 1)$ y contiene a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - y - 4z - 3 = 0 \end{cases} \text{ (Sol.: } -2x - 4y - 10z = 0 \text{)}$$

Ejercicios propuestos para casa:

Puntos alineados. Puntos coplanarios. Base.

1. Comprobar si los puntos A (1, 2, 3), B (1, -2, 4) y C (1, -3, 5) están alineados. (Sol: No)
2. Averigua los valores de m y n para que P(4, -1, 3) , Q(3, 5, 1) y R(0, m, n) estén alineados. (Sol.: m = 23 y n = -5)
3. Demostrar que los vectores $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(0,2,0)$ y $\vec{w}(0, 1, -3)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las componentes del vector $\vec{p}(4, -1, 2)$ en esta base. (Sol.: a) Son l.ind. b) (4, -1/6, -2/3))

Producto escalar. Producto vectorial. Producto mixto

4. Se consideran los puntos A (2, 1, 0), B (3, 1, 2) y C (4, 2, -1). Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan. (Sol.: $\frac{\sqrt{30}}{2}u^2$)
5. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).
6. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH sabiendo que A(1, 0, 0) , B(2, 3, 0), C(4, 0, 5) y E(7, 6, 3). Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

(Sol: V = 33 u³, G(10, 6, 8), H(9, 3, 8), D(3, -3, 5), F(8, 9, 3))

7. Se consideran los puntos P(2, 1, -1), Q(1, 4, 1) y R(1, 3, 1):

Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

Si desde el punto V(1, 1, -1) se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

(Sol.: a) Área = $\frac{\sqrt{5}}{2}$, b) plano determinado por P, Q y R $\pi : 2x + z - 3 = 0$, altura = $d(V, \pi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

Volumen = $\frac{1}{3}$ [área base x altura] = 1 u³)

Ecuaciones de la recta y del plano

8. Dados los puntos A (m, 2, -3), B (2, m, 1) y C (5, 3, -2) determina el valor de m para que estén alineados y hallar la recta que los contiene. (Sol.: m= 6)
9. Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta dada:

$$A(5, 1, 4) \quad B(3, 3, 4) \quad C(15, -15, 4) \quad D(1, 6, 0) \quad r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

(Sol.: Al sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación de la recta, si sale el mismo valor de λ , entonces el punto pertenece a la recta, si no sale el mismo valor no pertenece. A y B no pertenece; B sí pertenece)

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, 0, 0) y es perpendicular al plano $\pi : x - y - z + 2 = 0$. (Sol.: $r : \begin{cases} x+z = 1 \\ y-z = 0 \end{cases}$)
11. Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(3, 0, -1) y es perpendicular a los planos $\pi : 2x - 3y - z + 1 = 0$ $\pi' : 2x - y + 3 = 0$
12. Determina la ecuación del plano que contiene al punto P(2,1,2) y a la recta: $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$ (Sol.: $2x + y - z + 5 = 0$)
13. Comprueba si los puntos siguientes son coplanarios o no: A(1, 2, -1), B(3, -1, 4), C(2, 3, 1) y D(4, 0, 6)
14. Encuentra el valor de a para que los puntos A(1, 2, 3), B(1, 2, a), C(1, 3, 1) y D(2, a, 5) sean coplanarios.
15. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A(-4,0,-2) y B(0,3,-1), y es perpendicular al plano $\pi : x + 3z - 5 = 0$ (Sol.: $9x - 11y - 3z + 30 = 0$)
16. Halla "a" para que las rectas r y s estén sobre un mismo plano y busca la ecuación de dicho plano.
17. Calcula el volumen del tetraedro que determina el plano de ecuación $x + 3y + 6z - 12 = 0$ al cortar los planos coordenados. (Sol.: $16 u^3$)
18. Halla "k" para que las rectas r y s se corten en un punto. Halla para dicho valor la ecuación del plano que las contiene.

$$r : \begin{cases} 4x - y + z = -2 \\ 3x - y + kz = -2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - ky + z = -1 \end{cases}$$

Posición relativa de 2 rectas

19. Halla "a" para que las rectas r y s estén sobre un mismo plano.

$$r : \begin{cases} 2x + z = a \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + y = a \end{cases}$$

20. Halla "k" para que las rectas r y s se corten en un punto.

$$r : \begin{cases} 4x - y + z = -2 \\ 3x - y + kz = -2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - ky + z = -1 \end{cases}$$

21. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ $t : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$. Estudia la posición relativa

de cada par de ellas (Sol.: r y s se cruzan; r y t son paralelas; s y t son secantes)

22. Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5+4\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n} \quad (\text{Sol.: } m = 12 \text{ y } n = -3)$$

23. Calcula el valor de k para que las rectas r y s se corten en un punto. Halla el valor de ese punto de corte.

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = k-3\lambda \end{cases} \quad (\text{Sol.: } k = 3; P(3, 1, -3))$$

24. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en los siguientes apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

$$\begin{aligned} \text{a) } r: \begin{cases} x = 3-5\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6+5\mu \\ y = 4-3\mu \\ z = 2+\mu \end{cases} \quad \text{b) } r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \\ \text{c) } r: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 \end{cases} \quad (\text{Sol.: a) } r//s; \text{ b) se cortan; c) se cruzan}) \end{aligned}$$

25. Sean las rectas: $r: \begin{cases} x+y-z = 1 \\ 2x+y-z = 2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-2y+z = 3 \\ 2x-2y+z = 1 \end{cases}$ Estudiar su posición relativa (Sol.: se cruzan)

26. Discute la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro k :

$$r: \begin{cases} 2x-4y+z = k \\ 3x-y = 11 \end{cases} \quad s: \begin{cases} y+z = 6 \\ y-2z = -k \end{cases} \quad (\text{Sol.: si } k = 6, \text{ las rectas se cortan, si } k \neq 6 \text{ se cruzan})$$

Posición relativa de 2 planos

27. Halla la posición relativa del plano que contiene al punto $A(1, 1, -2)$ y es paralelo a los vectores

$$\vec{u} = (1, 0, 1) \text{ y } \vec{v} = (0, 1, -1) \text{ con los planos:}$$

$$\text{a) } \pi: x-2y-z+1=0; \text{ b) } \pi': -2x+2y+2z+4=0; \text{ c) } \pi'': 3x-3y-3z+1=0$$

Posición relativa de 3 planos

28. Determina la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1: x+2y-2z+3=0 & \quad \text{b) } \pi_1: x+2y-z+3=0 \\ \pi_2: 2x-y+3z+1=0 & \quad \pi_2: x+y+3z+1=0 \\ \pi_3: -2x-4y+4z-6=0 & \quad \pi_3: -2x-3y-2z-4=0 \end{aligned}$$

(Sol.: a) S. Compat. Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

b) S. Compat. Los tres planos no paralelos se cortan en una recta).

Posición relativa de recta y plano

29. Estudia la posición relativa del plano $\pi : x + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

$$S: x = y = \frac{z}{-2} \quad y \quad r: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } s \text{ y } \pi \text{ son paralelos; } t \text{ está incluida en } \pi)$$

30. Estudiar la posición relativa del plano π y la recta r , siendo:

$$a) r: \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - y - 4z - 3 = 0 \end{cases} \quad \pi: 4x + 4y + z + 4 = 0$$

$$b) r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \pi: x - y + z - 2 = 0$$

$$c) \pi: x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r \text{ contenida en } \pi)$$

31. Halla para qué valor de k son paralelos el plano $\pi : x + ky - z + 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

32. Encuentra el valor de m para que la recta r esté contenida en el plano de ecuación $\pi : 2x + y + z = -1$,

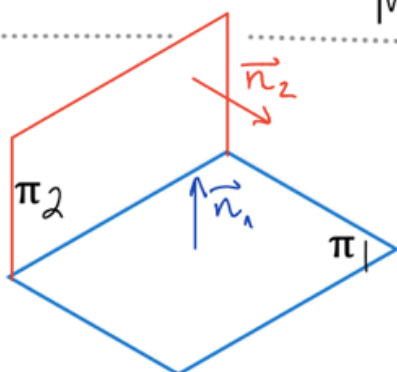
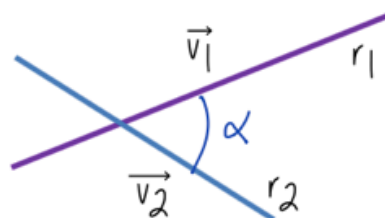
$$\text{siendo } r: \begin{cases} 3x + my + z = 1 \\ -2x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$$

UNIDAD 7. Problemas métricos.

15. Ángulos entre rectas y planos.

Ángulo entre dos rectas

$$\cos(\alpha) = \cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

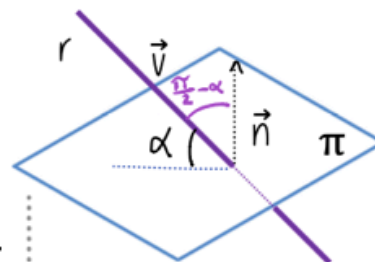


Ángulo entre dos planos

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Ángulo entre recta y plano

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right| = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|}$$



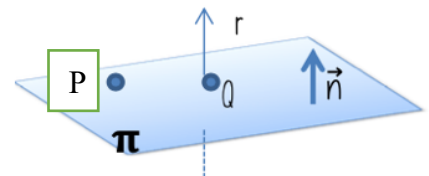
16. Distancias entre puntos, rectas y planos.

- **Distancia entre 2 puntos** $\rightarrow d(A,B)=|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

- **Distancia entre punto y recta** $\rightarrow P \text{ y } r: \langle A, \vec{u} \rangle \rightarrow d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{AO} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

Otro método:

- 1) Hallar plano Π perpendicular a r y que contiene a P
(Vector normal al plano = Vector de la recta)
- 2) Calcular punto Q intersección de r y Π
- 3) $d(P,r)=d(P,Q)$



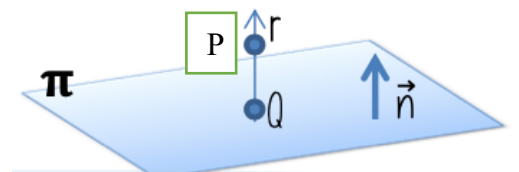
Proyección ortogonal de un punto P a una recta r $\rightarrow$ Calcular plano perpendicular a r que pasa por P y hacer la intersección con la recta r .

- **Distancia de un punto P a un plano Π** $\rightarrow P(x_1,y_1,z_1), \Pi: Ax+By+Cz+D=0$

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Otro método:

- 1) Hallar la recta r perpendicular a Π que pasa por P
- 2) Hallar Q la intersección de la recta r con el plano Π
- 3) $d(P, \Pi)=d(P,Q)$



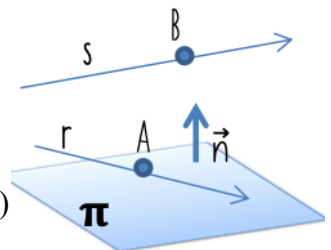
Proyección ortogonal de la recta r sobre el plano Π $\rightarrow$ Es la recta intersección del plano Π con un plano Π' perpendicular a Π que contiene a la recta r .

- **Distancia entre 2 rectas r y s.**

$r//s$ (paralelas) $\rightarrow$ cogemos un punto de r y hallamos la distancia a s

r no paralela a $s \rightarrow$

Hallamos plano Π paralelo a s que contiene a r ($\vec{n} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$) $\rightarrow d(r,s)=d(s, \Pi)$



Otro método: $d(r,s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área Base}} = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$ con A y B puntos cualquiera de r y s

- **Distancia de una recta r a un plano Π .**

Si se cortan $d(r, \Pi)=0$. Si no se cortan, $d(r, \Pi)=d(P, \Pi)$, P un punto de la recta.

- **Distancia entre 2 planos Π y Π' .**

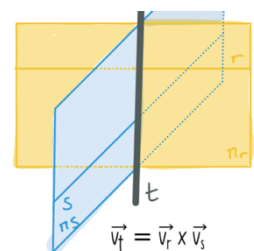
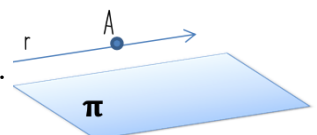
Si $\Pi//\Pi'$ y P es un punto de $\Pi \rightarrow d(\Pi,\Pi')=d(P, \Pi')$

- **Recta perpendicular a 2 rectas que se cruzan.**

Hallar plano Π_r que contiene recta r y vector $\vec{w} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ (perpendicular a r y s)

Hallar plano Π_s que contiene s y vector $\vec{w} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ (perpendicular a r y s)

La recta perpendicular t es la intersección de Π_r y Π_s



Geometría	
B1. Medición	B1.1. Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
C1. Formas geométricas de 2 y 3 dims.	C1.1. Objetos geométricos de tres dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. C1.2. Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados con coordenadas cartesianas.
C2. Localización y sistemas de representación	C2.1. Relaciones de objetos geométricos en el espacio: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales. C2.2. Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.
C3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.	C3.1. Representación de objetos geométricos en el espacio mediante herramientas digitales. C3.2. Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos y otros) para resolver problemas en el espacio. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.

TEORÍA: Ángulos entre rectas y planos

Ejercicios

1. ¿Qué ángulo forma la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi: 2x - 5y + 7z - 11 = 0$ (Sol.: 35°)

2. Junio 2024/25

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.2) [1,25 puntos] Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0, 0, 0)$.

3. Hallar el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \quad s: \begin{cases} 2x+3y-5z+4 = 0 \\ x-2y+5 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } 41^\circ 59' 35'')$$

4. Hallar el ángulo entre los planos $\pi: x-2y+4z=0$ y $\pi': 2x-y+3=0$ (Sol.: $67^\circ 1' 23''$)

TEORÍA: Distancia entre 2 puntos.

TEORÍA: Distancia de un punto a una recta.

Ejercicios

5. Junio 2024/25

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.2) [1,25 puntos] Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1, -1, 2)$.

6. Julio 2021/22

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

b) [1 punto] Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A , es decir, el punto simétrico de A con respecto a π .

7. Junio 2020/21

4. a) [1,25 puntos] Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .

8. Calcula la distancia del punto $P(5, -1, 6)$ a la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$ (Sol.: $\sqrt{12}$)

9. Sea el punto $P(3, -3, 1)$ y la recta $r: (x, y, z) = (2, 3, 4) + \lambda(-1, 2, 1)$

a) Halla la proyección del punto P a la recta r .

b) Halla la distancia del punto P a la recta r . (Sol.: a) $(14/3, -7/3, 4/3)$ b) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$)

10. Calcula el simétrico del punto $A(1, 0, 1)$ respecto de la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ (Sol.: $A'(3, 2, 1)$)

11. Determina el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

(Sol.: $A'(-3, -3, -3)$)

TEORÍA: Distancia entre un punto a un plano

Ejercicios

12. Sea $P(3, 2, -1)$ y el plano $\pi : 2x - y - 2z + 3 = 0$. Se pide:

a) La proyección ortogonal de P sobre π .

b) La distancia del punto P al plano π .

(Sol.: a) $H(1, 3, 1)$ b) $d = 3$)

13. Julio 2024/25 (apartado a.3 – Necesita los anteriores)

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) [1 punto] Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) [0,75 puntos] Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

14. Julio 2023/24 (apartado b, pero necesita el a)

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) [1,25 puntos] Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

15. Julio 2020/21

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

b) [1,5 puntos] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2,0,1)$ al plano π_1 .

16. Calcula la distancia del punto $P(5, 5, 3)$ al plano $\pi : (x, y, z) = (0, 0, 4) + \lambda(2, 2, -1) + \mu(-3, 2, 0)$

(Sol: $d(P, \pi) = \frac{15}{\sqrt{113}}$)

17. Halla el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi : x - 3y - 2z + 4 = 0$ (Sol.: $P'(2, -1, 1)$)

TEORÍA: Distancia entre 2 rectas.



Ejercicios

18. Calcular la distancia entre las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases} \quad (\text{Sol.: } 3)$$

19. Halla la distancia entre las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol.: } r // s, d = 5/\sqrt{3})$$

20. Halla la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3} \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{3} \quad (\text{Sol.: } d(r, s) = \frac{84}{\sqrt{91}})$$

TEORÍA: Distancia de una recta a un plano.

Ejercicios

21. Calcular la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ al plano $\pi \equiv x - 3y - z + 6 = 0$ (Sol.: $\frac{8}{\sqrt{11}}$)

22. Considera la recta r y el plano π de ecuaciones: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-1}{2}$ $\pi \equiv ax + 2y - 3z - 3 = 0$

- a) Determina para qué valores del parámetro a la recta r y el plano π son paralelos.
- b) Halla la distancia entre la recta r y el plano π para el valor hallado de a en el apartado anterior.

TEORÍA: Distancia entre 2 planos.

Ejercicios

23. Calcular la distancia entre los planos:

a) $\pi \equiv x - 5y + 2z - 19 = 0$ y $\pi' \equiv 2x - 10y + 4z = 0$ (Sol.: $\frac{38}{\sqrt{120}}$)

b) $\pi \equiv y - 5z + 4 = 0$ y $\pi' \equiv 2y - 10z = 0$

TEORÍA: Perpendicular común a dos rectas que se cruzan



Ejercicios

24. Sean dos rectas r y s que se cruzan: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

Calcular la ecuación de su perpendicular común.

25. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+3 = 0 \\ y-z-4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π , que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r . (Nota: vector dirección de r , es $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, es paralelo al vector dirección de la recta r')

26. Dadas las rectas r y s : $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

(Sol.: $R(2/3, -7/6, -1/6)$, $S(2/3, -2/3, -2/3)$)

Otros ejercicios propuestos para repasar

Ejercicios de distancias

1. Halla razonadamente la distancia de P (5, 6, 6) a la recta r:
$$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (S: \sqrt{50})$$

2. Halla la distancia del punto P(1, 2, 1) a la recta r:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (\text{Sol: } \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{6}})$$

3. Distancia del punto P(1, 2, 1) a la recta s:
$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol: } 1)$$

4. Halla la proyección ortogonal del punto P(1, 2, 1) a la recta r:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

(Sol.: H(16/6, -13/6, 11/6))

5. Calcula el simétrico de P respecto de r en cada caso:

a) P (2, 1, 0) ; r : (5 + 2 λ , 2 - λ , -2)

b) P (1, -1, 3) ; r : (-λ , 0 , 8 + λ) (Sol.: a) P'(4, 5, -4) b) P'(5, 1, 7))

6. Halla la distancia de P(3, 1, 7) a $\pi : x - 3y + 5z - 1 = 0$ (Sol.: $\frac{34}{\sqrt{35}}$)

7. Sea r la recta que pasa por A(2, 4, 0) y B(6, 2, 0) y sea s la recta que pasa por C(0, 0, 7) y D(3, 2, 0). Obtén, de manera razonada, la distancia entre r y s. (Sol.: $\sqrt{2}$)

8. Determina la distancia entre las rectas:

r: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{4} = z+1$ s: (x, y, z) = (4, 2, 1) + μ(2, 4, 1), μ ∈ ℝ

(Sol.: r // s; d(r, s) = $\sqrt{665} / 7$ u)

9. Comprueba que las rectas r $\equiv \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ y s $\equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ se cruzan, y halla la ecuación de la perpendicular común a ambas. (Sol: p $\equiv \begin{cases} 5x - 16y - 7z - 21 = 0 \\ x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$)

10. Dadas las rectas de ecuaciones r $\equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ y s $\equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$, determina:

a) La posición relativa de r y s. b) La ecuación de la perpendicular común a r y a s.

c) Las coordenadas de los puntos donde la perpendicular común corta a r y a s.

d) La distancia entre las rectas r y s.

Ejercicios que han caído en exámenes

11. Junio 2019/20

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

- [1 punto] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.
- [1,5 puntos] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

12. Junio 2019/20

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$.

- [1,5 puntos] Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .
- [1 punto] Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s .

13. Julio 2019/20

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

- [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .
- [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

14. Julio 2019/20

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

- [1,25 puntos] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .
- [1,25 puntos] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

15. Junio 2018/19

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 2)$, $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:

- Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralela a la recta que pasa por C y D . (1,25 puntos)
- Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D . (1,25 puntos)

16. Junio 2018/19

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.

- Calcula la distancia del punto P a la recta r . **(1,25 puntos)**
- Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q , siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P . **(1,25 puntos)**

17. Julio 2018/19

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

- Determina razonadamente la posición relativa de r y π . **(1,25 puntos)**
- Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r . **(1,25 puntos)**

18. Julio 2018/19

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a , b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

19. Junio 2017/18

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:

- Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**
- Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)**

20. Septiembre 2017/18

4A. Dados los puntos $A(-1, 3, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$

- Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(0,75 puntos)**
- Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. **(0,75 puntos)**
- Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r . **(1 punto)**

21. Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C .

22. Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$

- [1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r .
- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

23. Madrid 2023 – Opción A

Problema 23.1.3 (2,5 puntos) Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 3, 1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1, 1, 6)$. Se pide:

- (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA' .
- (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D , de la base.
- (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

24. Madrid 2022 – Opción A

Problema 22.3.3 (2,5 puntos) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$

- (0,5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.
- (1,25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
- (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

25. Madrid Modelo 2022 – Opción A

Problema 22.1.3 (2,5 puntos) Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1, 0, 2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3, 1, 0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

- (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π .
- (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

26. Madrid Junio 2021 – Opción A

Problema 21.6.3 (2,5 puntos) En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

- (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.
- (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45° , el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.
- (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π , y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π , desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P . ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

Castilla La Mancha

27. Septiembre 2017/18

4B. Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 0, -4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB . (1,5 puntos)
- Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\vec{AB}$ y que pase por el punto A . (1 punto)

28. Junio 2016/17

4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

- Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . (1,5 puntos)
- Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . (1 punto)

29. Junio 2016/17

- Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. (1 punto)
- Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

30. Septiembre 2016/17

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

- a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

31. Septiembre 2016/17

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

- b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$
(1,25 puntos)

32. JUNIO 2016 4A

Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $v(1, -1, 0)$

- a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$ (1,5 puntos)
b) Calcula el punto simétrica de Q respecto a r . (1 punto)

(Sol.: a) $R(1/2, 1/2, 1)$; b) $Q'(1, 1, 1)$

33. JUNIO 2016 4B

Dados los planos

$$\pi : ax + y + 2z = 2 \quad \pi' : x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi'' : x + ay + z = a \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}, \text{ se pide:}$$

- a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1,5 puntos)
b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π' y π'' . (1 punto)
(Sol.: a) $a \neq 1, 2$ Se cortan en un punto los tres planos, si $a = 1$ π' y π'' son paralelos y π los corta en dos rectas paralelas; si $a = 2$ se cortan dos a dos en tres rectas paralelas)

34. SEPTIEMBRE 2016 4A

Dadas las rectas

$$r: 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2\gamma \\ y = -1 + \gamma \\ z = c - 3\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R} \text{ donde } c \in \mathbb{R}, \text{ se pide:}$$

- a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)
b) Halla el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. (1 punto)
(Sol.: a) $c \neq 3$ las rectas se cruzan; b) $c = -9$, punto de corte $P(3, 1, -3)$)

35. SEPTIEMBRE 2016 4B

Dados los planos

$$\pi : 2x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi' : \begin{cases} x = 1 + \mu + \gamma \\ y = \mu - \gamma \\ z = 2 + 2\mu + \gamma \end{cases} \quad \mu, \gamma \in \mathbb{R} \text{ y el punto } P(2, -3, 0)$$

a) Hallas la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π' (1,5 puntos)

b) Calcular el ángulo entre los planos π y π' (1 punto)

(Sol.: a) Para conocer el vector director de π' se hallará el producto vectorial de los vectores que lo engendran

$$v = (5, 7, 11), r : \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11} ; b) 40^\circ 5' 46''$$

36. JUNIO 2015 4A.

a) Calcula la distancia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta $\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ (1,25 puntos)

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r . (1,25 puntos)

(Sol.: a) Hallaremos un plano π que contenga el punto P y que sea perpendicular a la recta dada. Una vez hallado el plano se calculara el punto Q de intersección del plano y la recta, el modulo del vector PQ es la distancia pedida.

$$\Pi: x - y + z + 3 = 0; d = \sqrt{2} u; b) P'(1, 2 - 2))$$

37. JUNIO 2015 4B.

Dados los puntos $A(1, \lambda + 1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda + 2, 0, 1)$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que A , B y C estén alineados. (1,25 puntos)

b) Para $\lambda = -1$, da la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A , B y C . (1,25 puntos)

(Sol.: a) $\lambda = 1$; b) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores AB , AC y AG , siendo G el punto generador del plano. $\Pi: x + y - 1 = 0$)

38. SEPTIEMBRE 2015 4A.

$$\text{Dada la recta } r = \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Da la ecuación implícita del plano Π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2, 1, 1)$ (1,25 puntos)

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de Π con los ejes coordenados (1,25 puntos)

(Sol.: a) El plano buscado π como vector director el de la recta r , que es perpendicular al vector PG , siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\Pi : x + 3y + z - 6 = 0; b) V = (1 / 6) 72 = 12 u^3$$

Unidad 8. Estadística y probabilidad.

1. Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.

EXPERIMENTO ALEATORIO Un fenómeno o experiencia se dice aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado. Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia antes de realizarla, se dice que el experimento es determinista.

ESPACIO MUESTRAL es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y se representa por Ω o E .

SUCESO ALEATORIO Es un suceso que ocurrirá o no dependiendo del azar.

SUCESO ELEMENTAL Cada elemento del espacio muestral E se llama suceso elemental.

El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama **ESPACIO DE SUCESOS S** . Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral. Si la experiencia aleatoria: lanzar una moneda $E = \{c, x\}$, el espacio de sucesos $S = \{\emptyset, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$

2. Tipos de sucesos

Suceso elemental formado por un solo elemento $A = \{3\}$

Suceso imposible es aquel que nunca se realiza, se representa por $\emptyset$.

Suceso contrario o complementario de A y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A , Sea $E = \{3, 4, 7, 8\}$ siendo $A = \{3\}$, el suceso contrario a A sería $\bar{A} = \{4, 7, 8\}$.

Suceso compuesto: formado por dos o más elementos $B = \{3, 5\}$

Suceso seguro es el que se realiza siempre, Ω o E .

3. Operaciones con sucesos

Suceso unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando lo hacen A ó B (o ambos). Se representa por $A \cup B$

Suceso intersección de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza a la vez el suceso A y el suceso B . Se representa por $A \cap B$.

Diferencia de sucesos: $A - B$ (se lee A menos B) es el suceso formado por los todos los casos de A que no son de B .

$$A - B = (A \cap \bar{B})$$

Sucesos incompatibles: dos sucesos, A y B , se llaman incompatibles cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

Sucesos compatibles: dos sucesos A y B son compatibles si pueden obtenerse simultáneamente. Es decir

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

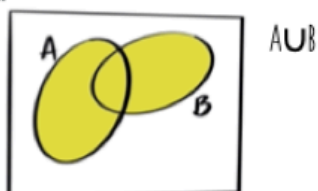
Algunas propiedades importantes

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

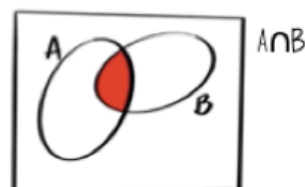
- Leyes de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Continuación (Operaciones con sucesos)

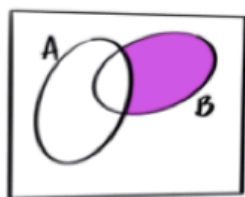
UNIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B y se representa por $A \cup B$, al suceso formado por todos los elementos de A y/o de B .



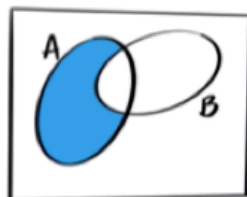
INTERSECCIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso intersección de A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que está formado por todos los elementos de A y de B simultáneamente.



DIFERENCIA DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso diferencia de A y B y se representa por $A \setminus B$ o $A - B$, al suceso $A \cap \bar{B}$. O sea, $A \setminus B$ está formado por todos los elementos de A que no están en B .



$$B - A = B \setminus A$$

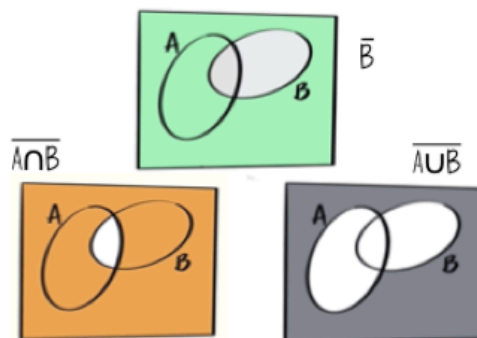


$$A - B = A \setminus B$$

SUCESOS INCOMPATIBLES Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Un suceso y su contrario son siempre incompatibles



COMPLEMENTARIO Dado el suceso A se llama suceso complementario de A , $\bar{A}$, al suceso formado por los elementos de E que no están en A .



4. Frecuencia Absoluta y relativa de un suceso A

Se llama **FRECUENCIA ABSOLUTA** f_a de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **FRECUENCIA RELATIVA** f_r de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento: $f_r = \frac{f_a}{n}$, siendo n el número de veces que se repite el experimento.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número, a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente: $\lim f_r(S) = P(S)$. A este número lo llamamos **PROBABILIDAD DEL SUCESO S**.

Propiedades

- $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- $f_r(E) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

5. Definición axiomática de probabilidad

Se puede definir la probabilidad como una función P que a cada suceso A le asigna un número real $P(A)$ que cumple 3 axiomas:

Axioma 1: La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1. $P(E) = 1$

Axioma 2: Cualquiera que sea el suceso A , su probabilidad es un número no negativo. $P(A) \geq 0$

Axioma 3: Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPIEDADES

- $P(\emptyset) = 0$ ● $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si A y B son dos sucesos tales que $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

8. Probabilidad condicionada

Se llama **PROBABILIDAD CONDICIONADA DEL SUCESO A RESPECTO DEL SUCESO B** a la probabilidad de A sabiendo que ocurrió B , la denotaremos por $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ siempre que } P(B) \neq 0$$

De lo anterior se deducen claramente las relaciones siguientes

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Si fuesen tres sucesos $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

Dos sucesos A y B se dicen **INDEPENDIENTES** si $P(B) = P(B|A)$

También se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

6. Regla de Laplace

LEY DE LAPLACE

Si los resultados de una experiencia aleatoria son casos equiprobables, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables a } A}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$

7. Diagrama de árbol

Es una forma de organizar el planteamiento de un problema de probabilidad de manera que el experimento se va ramificando a medida que se van sucediendo las pruebas (lanzamientos, extracciones, tiradas, ...).

Sobre cada rama se va anotando la probabilidad de que el suceso correspondiente se produzca. Finalmente, la probabilidad de llegar a un determinado resultado es el producto de todas las probabilidades de las ramas que llevan a ese resultado.

9. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia nos servirán de apoyo en la aplicación de la probabilidad condicionada. Estas tablas, de fácil manejo, nos permiten calcular una probabilidad condicionada fácilmente.

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

10. Teorema de la probabilidad total

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Entonces,

$$P(S) = P(A_1 \cap S) + P(A_2 \cap S) + \dots + P(A_n \cap S) = P(A_1) \cdot P(S|A_1) + P(A_2) \cdot P(S|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(S|A_n)$$

11. Teorema de Bayes (Prob. A “posteriori”)

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Entonces,

$$P[A_i / S] = \frac{P(A_i) \cdot P(S/A_i)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$

12. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Si los resultados son finitos o infinitos numerables, la variable aleatoria se denomina discreta. Si los resultados son infinitos, la variable aleatoria es continua.

13. Variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, se llama función de probabilidad o función de masa, a aquella función que hace corresponder a cada valor de la variable con su probabilidad. $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$

Propiedades de la función de probabilidad

a) $p_i \geq 0$ b) $\sum p_i = 1$

Esperanza y varianza de la v.a

Esperanza $\mu = E[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

Varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

Función de distribución

Es la función acumulada $F(x) = P(X \leq x)$

Ejemplo

X = resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ejemplo

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$x_i p_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
$x_i^2 p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

$$E(X) = 21/6$$

$$Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 = 105/36 = 2,92$$

Ejemplo

X = lanzar un dado

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$F(x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

14. Modelos probabilísticos discretos.

14.1 Modelo Bernoulli. Experimento aleatorio con 2 posibles resultados: éxito (1) o fracaso (0). X variable aleatoria con 2 valores, 0 fracaso y 1 éxito para un suceso A .

$P(x=0)=1-p=q$, $P(x=1)=p$

$X \sim \text{Bern}(p)$

x	0	1
Probab.	$1-p=q$	p

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p-p^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

14.2 Modelo Binomial. Consiste en repetir n veces un experimento Bernoulli de parámetro p en las mismas condiciones de independencia. La variable $X = n^o$ veces que ocurre con éxito el suceso A será una binomial de parámetros n y p . $X \sim B(n, p)$. $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$P(X=a) = \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} \quad \text{donde} \quad \binom{n}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = npq$$

Ejemplo

El 20% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Definimos $X = n^o$ de personas que están viendo el programa $\sim \text{Bin}(10, 0.20)$ donde $p=0.2$ es la probabilidad de éxito (ver concurso de tv). $\text{Rec}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a) Calcula la probabilidad de que ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0.2^8 \cdot (1-0.2)^2 = 0.000074$$

b) Calcula la probabilidad de que más de ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>8) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} \cdot 0.2^9 \cdot (1-0.2)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.2^{10} \cdot (1-0.2)^0 = 0.000004 + 0.0000001$$

$$= 0.0000041$$

c) Calcula la probabilidad de que algunas de las diez personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.2^0 \cdot (1-0.2)^{10} = 1 - 0.11 = 0.89$$

c) Calcular la media y la varianza $E(X) = 10 \cdot 0.20 = 2$ $\text{Var}(X) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6$

15. Variable aleatoria continua.

Una **variable aleatoria** es continua cuando puede tomar un número infinito de valores en la recta real. La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama **distribución de probabilidad continua**. En una distribución continua la probabilidad de un valor concreto es cero. En este caso, las probabilidades que calculamos están siempre asociadas a intervalos: $P(a \leq X \leq b)$

Función de distribución $\rightarrow$ Es la función acumulada $F(x) = P(X \leq x)$

Función de probabilidad o función de densidad $\rightarrow f(x) = F'(x) \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

Propiedades

$$a) f(x) \geq 0 \quad b) P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) \quad c) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad d) P(X=a) = 0$$

Esperanza y varianza de la v.a

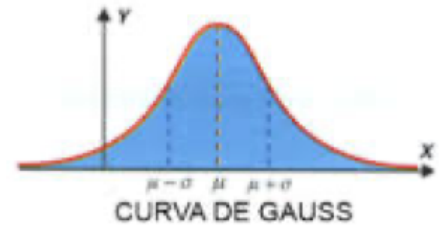
$$\text{Esperanza } \mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad // \quad \text{Varianza } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

16. Modelos probabilísticos continuos: Normal.

Diremos que una distribución de probabilidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , y lo representaremos por $N(\mu; \sigma)$ cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica respecto a la media, de máximo en la media, y que tiene 2 puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media ($\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ respectivamente).

Definición. Una variable aleatoria continua, con media μ y con desviación típica σ , es una variable normal si su función de densidad,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ es: } f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$



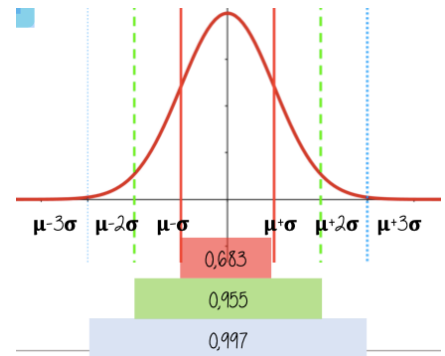
Propiedad. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

Regla 68-95-99

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \begin{cases} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683 \\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,955 \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997 \end{cases}$$

Normal tipificada $N(0,1)$

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$



CALCULO DE PROBABILIDADES EN LA DISTRIBUCION N(0,1)

$$Z \sim N(0,1)$$

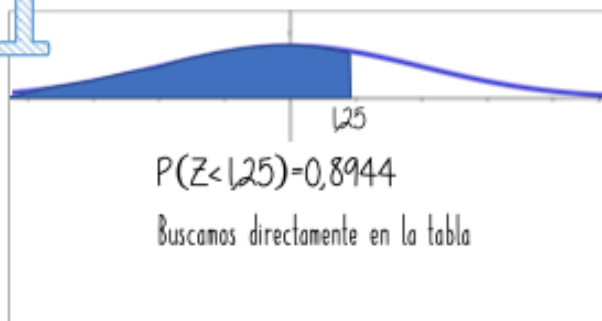
$$P(-\infty < Z < \infty) = 1$$

$$P(Z > 0) = 0,5$$

$$P(Z < 0) = 0,5$$

0

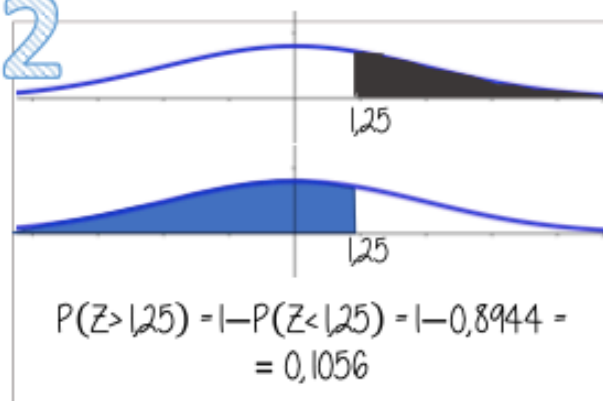
1



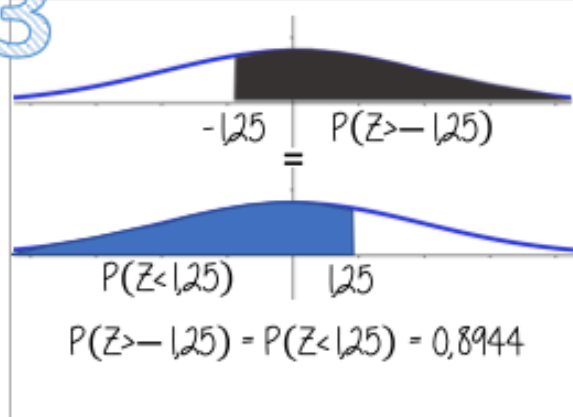
z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7189	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7546
0.7	0.7577	0.7608	0.7638	0.7668	0.7697	0.7726	0.7755	0.7784	0.7812	0.7841
0.8	0.7869	0.7896	0.7924	0.7952	0.7979	0.8006	0.8033	0.8060	0.8086	0.8113
0.9	0.8139	0.8166	0.8192	0.8218	0.8244	0.8269	0.8294	0.8319	0.8344	0.8369
1.0	0.8394	0.8419	0.8444	0.8468	0.8493	0.8517	0.8541	0.8564	0.8587	0.8609
1.1	0.8632	0.8654	0.8675	0.8696	0.8717	0.8738	0.8758	0.8778	0.8798	0.8818
1.2	0.8838	0.8858	0.8878	0.8897	0.8916	0.8935	0.8954	0.8972	0.8990	0.9008
1.3	0.9025	0.9043	0.9061	0.9078	0.9095	0.9112	0.9129	0.9146	0.9162	0.9179
1.4	0.9195	0.9212	0.9228	0.9244	0.9261	0.9277	0.9292	0.9308	0.9324	0.9341
1.5	0.9357	0.9374	0.9389	0.9405	0.9421	0.9436	0.9451	0.9467	0.9482	0.9497
1.6	0.9512	0.9527	0.9542	0.9557	0.9571	0.9586	0.9599	0.9613	0.9628	0.9642
1.7	0.9656	0.9671	0.9685	0.9699	0.9713	0.9726	0.9739	0.9752	0.9766	0.9778
1.8	0.9791	0.9804	0.9816	0.9828	0.9840	0.9851	0.9863	0.9874	0.9885	0.9896
1.9	0.9906	0.9916	0.9926	0.9935	0.9944	0.9953	0.9961	0.9969	0.9977	0.9984
2.0	0.9990	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

En la tabla buscamos $P(Z < a)$,
siendo a un nº positivo

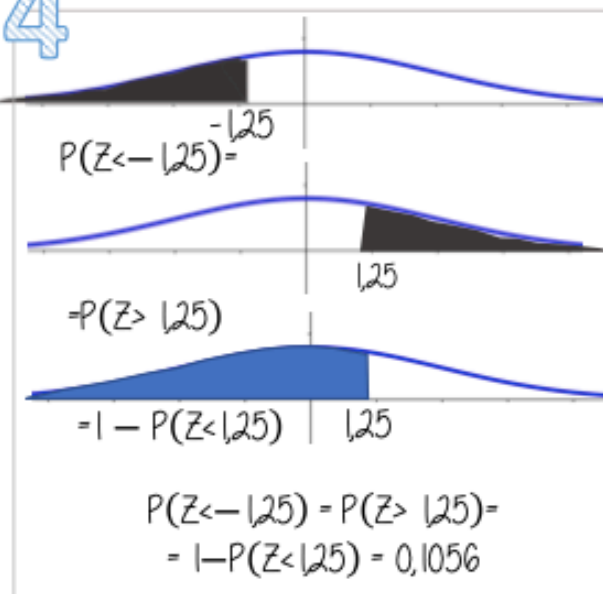
2



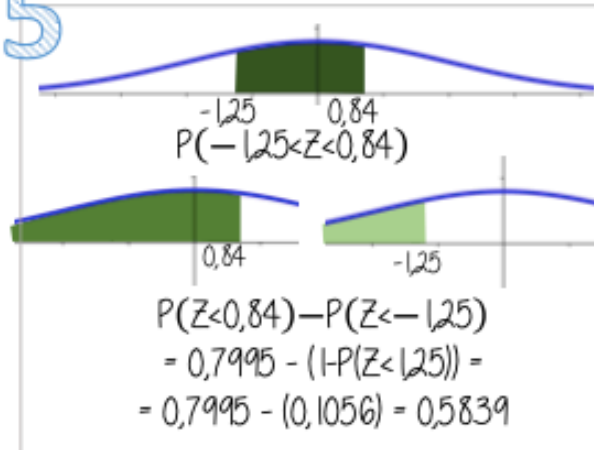
3



4



5



UNIDAD 8. Estadística y Probabilidad.

8. Probabilidad y Estadística	
B1. Medición	B1.5. La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios: interpretaciones subjetiva, clásica y frecuentista.
E1. Incertidumbre	E1.1. Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia. E1.2. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes: resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
E2. Distribuciones de probabilidad	E2.1. Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. E2.2. Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas.

TEORÍA. Experimentos aleatorios

TEORÍA: Espacio muestral. Suceso aleatorio. Espacio de sucesos.

TEORÍA: Tipos de sucesos.

Ejercicios

- 1.- Determina el conjunto de todos los sucesos de los siguientes experimentos aleatorios
 - a) Al lanzar una moneda y anotar el resultado, determina el espacio muestral y el conjunto de sucesos S
 - b) Al lanzar un dado de quiniela y anotar el resultado, determina espacio muestral y conjunto de sucesos S
- 2.- Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior:
 - a) ¿Cuál es el espacio muestral?
 - b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales
 - c) ¿Cuántos sucesos tiene este experimento?
- 3.- Sea el experimento de lanzar un dado con las seis caras numeradas del 1 al 6. Determinar el espacio de sucesos.

TEORÍA: Operaciones con sucesos.

Ejercicios

4.- Consideramos el experimento “lanzar un dado”. A partir de los sucesos:

$$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4\}$$

a) Obtener los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$

b) Obtén los conjuntos $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan

c) Calcula $B \cup C$ y $B \cap C$, y razona los resultados.

5.- En el lanzamiento de un dado se define los sucesos $A =$ “obtener un resultado par”, $B =$ “obtener un resultado mayor que 4” y $C =$ “obtener 1”. Calcula:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A \cap B}$ e) $A \cap \bar{B}$ (Sol.: a) $\{2,4,5,6\}$ b) $\{6\}$ c) $\{1,3\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e) $\{2,4\}$)

6.- Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos $A =$ “sale al menos dos cruces” y $B =$ “sale alguna cara”. Calcula los sucesos $(A \cup B)$, $(A \cap B)$, $(A - B)$ y $(B - A)$

(Sol.: $A \cup B =$ “XXX, CXX, XCX, XXC, CCC, CCX, CXC, XCC”; $A \cap B =$ “CXX, XCX, XXC”; $A - B = A \cap \bar{B} =$ “XXX”; $B - A = B \cap \bar{A} =$ “CCC, CCX, CXC, XCC”)

7.- Si una persona sintoniza habitualmente dos emisoras de radio, “Radio A” y “Radio B”, definir los siguientes sucesos: $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$

(Sol.: a) “escucha alguna de las dos emisoras”, b) “no escucha ninguna emisora” equivalente a no escucha Radio A, ni escucha Radio B, c) “escucha las dos emisoras”, d) “no escucha las dos emisoras” equivalente a “no escuchar A o no escuchar B”

TEORÍA: Frecuencia absoluta y frecuencia relativa de un suceso A

TEORÍA: Ley de los grandes números

TEORÍA: Definición axiomática de probabilidad. Propiedades.

TEORÍA: Regla de Laplace



Ejercicios

8.- En el lanzamiento de un dado, calcular las probabilidades:

- a) A = “obtener un número par” b) B = “obtener un resultado mayor que 4”
c) C = “obtener múltiplo de 3” d) D = “obtener un resultado menor que 3”

9.- En una baraja de 40 cartas, hallar:

- a) P[as] b) P[oros] c) P[figura] (Sol.: a) 0,1; b) 0,25; c) 0,3)

10.- Se lanzan dos dados. Se pide:

- a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen sea múltiplo de tres.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

(Sol.: a) $P(A) = 12/36 = 1/3$ b) $P(B) = 1/3$)

11.- **PAU** María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado. Si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

- a) Calcule la probabilidad de que gane Laura, asociado al experimento.
b) Probabilidad de que gane María. (Sol.: a) $P(\text{gana Laura}) = 1/6$; b) $P(\text{gana María}) = 1/6$)

12.- En el experimento aleatorio de estudiar las familias de tres hijos por el sexo de dichos hijos consideramos los siguientes sucesos:

A = “el hijo mayor es varón” B = “los tres hijos tienen igual sexo” C = “ningún hijo es varón”

Encuentra los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: E; A; B; C; $A \cap B$; $A \cap C$; $\bar{B}$

(Sol.: $P[E] = 8/8 = 1$; $P[A] = 4/8 = 1/2$; $P[B] = 2/8 = 1/4$; $P[A \cap B] = 1/8$; $P[A \cap C] = 0$; $P[\bar{B}] = 6/8 = 3/4$)

TEORÍA: Diagramas de árbol.

Ejercicios

13.- En una urna hay 4 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se sacan 2 bolas de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas? ¿Y la de que ambas sean iguales? (Nota: Realiza un diagrama de árbol)

(Sol.: $P(\text{extraer dos bolas rojas}) = 1/36$; $P(\text{extraer dos bolas iguales}) = 5/18$)

14.- Se tiene una bolsa con 7 bolas verdes y 5 rojas, de la que se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean verdes? ¿Y de que sean del mismo color? (Sol.: a) $P(3 V) = 0,1591$ b) $P[3 V \text{ o } 3 R] = 9/44 \cong 0,2045$)

TEORÍA: Probabilidad condicionada.

Ejercicios

15.- Al extraer una carta de la baraja española, se consideran los siguientes sucesos: B = “ obtener bastos”, F=“obtener una figura” y R =“obtener rey”.

a) Halla la probabilidad $P(R/F)$ (Sol.: $P(R/F) = 1/3$)

b) Comprobar si los sucesos B y F por un lado, y R y F, por otro, son o no independientes. (Sol.: B y F independientes; R y F son dependientes)

16.- En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es $1/3$, de que se active la segunda es $2/5$ y de que se activen las dos a la vez es $1/15$. ¿Cual es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas? (Sol.: $P(A_1 \cup A_2) = 2/3$; $P(\text{no sea active ninguna}) = 1/3$)

17.- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0'5$, que $P(B) = 0'4$ y que $P(A \cup B) = 0'8$, determine $P(A/B)$.

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0'3$, que $P(D) = 0'8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

(Solución a) $P(A/B) = 0'25$ b) C y D son independientes, determine $P(C \cup D) = 0'86$

18.- Tenemos una bolsa con bolas de colores numeradas. Si se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad:

a) de que el número sea par con la condición de que sea del color verde

b) de que el número sea par con la condición de que sea del color rojo

c) de que el número sea par con la condición de que sea del color negro

(Sol.: a) $P[\text{par/verde}] = \frac{P[\text{par y verde}]}{P[\text{verde}]} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$; b) $1/2$; c) 1)

19.- PAU Se lanzan dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 10?

b) Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres? (Sol.: $P(A) = 3/36 = 1/12$. b) En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. . Por tanto, $P(B/A) = 2/6 = 1/3$)

20.- Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. De ellas se extraen, al azar y sin reemplazamiento, dos bolas. Construye un diagrama de árbol asociado al experimento. A partir de él determina:

a) la probabilidad de que las bolas extraídas sean de distinto color.

b) Si las bolas han resultado de distinto color, ¿cuál es la probabilidad de que la primera fuese blanca?

(Sol.: a) $P[B \text{ y } N] = 30/56$; b) $P[1^a \text{ B/B y N}] = (P(1^a \text{ B}) \cdot P(2^a \text{ N} / 1^a \text{ B})) / P(B \text{ y } N) = 1/2$)

21.- El departamento de Matemáticas de cierto Instituto ha decidido que este año aprobarán esta asignatura aquellos que superen uno de los dos exámenes propuestos a lo largo del curso. Se sabe que el primer examen lo aprobó un 62% de los alumnos, mientras que el segundo lo aprobó un 45%. Al final han aprobado la asignatura un 75% de los alumnos. ¿Cuál hubiera sido el porcentaje de si hubiera exigido la superación de las dos pruebas para aprobar la asignatura? (Sol.: $P(A \cap B) = 0'32$; 32%)

22.- La probabilidad de que una persona use gafas es 0,6; la probabilidad de que tenga los ojos claros es 0,6 y la probabilidad de que use gafas y tenga ojos claros es 0,52. Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar:

a) No use gafas b) Use gafas o tenga los ojos claros. c) No use gafas o no tenga los ojos claros

(Sol.: a) $P(\bar{A}) = 0,4$; b) $P(A \cup B) = 0,68$; c) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,48$)

23.- En un centro escolar el 80% de los alumnos practican algún deporte, el 25% tocan un instrumento musical y el 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno de ese centro elegido al azar no realice ninguna de las dos actividades. (Sol.: $P[D \cup M] = 0,90$; $P[(\overline{D \cup M})] = 1 - P[D \cup M] = 0,10$)

TEORÍA: Tablas de contingencia

Ejercicios

24.- Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla. Si se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad que sea chica? ¿Y la probabilidad de que sea chica de 1º? ¿Y la probabilidad que si es de 2º sea chica? ¿Y la probabilidad de que sea de 2º si es una chica] (Sol.: a) $P[\text{sea una chica}] = 120/230$; b) $P[\text{sea chica de 1º}] = 65/230$; c) $P[\text{sea chica/ser de 2º}] = 55/105$, d) $P[\text{sea de 2º/ ser chica}] = 55/120$)

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

25.- La siguiente tabla muestra un estudio sobre el hábito de hacer deporte en un grupo de hombres y mujeres.

	Hombre	Mujer	Total
Deportista	50	70	120
No deportista	70	60	130
Total	120	130	250

a) Calcular la probabilidad de A = “Deportista/Hombre”

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer sabiendo que no es fumadora?

(Sol.: a) $P(A) = 50 / 120 = 5 / 12$; b) $P(B) = 60 / 130 = 6 / 13$)

26.- Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos son mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio solo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos son mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos son mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis. (Sol.: Realizara una tabla de contingencia. $P(\text{varón y de la sección de tenis}) = 150/1000 = 0,15$)

TEORÍA: Teorema de la probabilidad total

TEORÍA: Teorema de Bayes

Ejercicios

27.- (Murcia, septiembre de 2009) En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20% de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40% son de primero de bachillerato y el 30% participan en la de fútbol, de los cuáles el 25% son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

28.- Según la revista Al-móvil, el 63% de los usuarios de móvil en España tiene un “Smartphone”. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77% lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otros tipos de teléfono móvil solo el 8% lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

29.- Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

30.- (Murcia, junio de 2009) En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

31.- Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo. a) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores

32.- En una clase de segundo de bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano y sea chica?

c) Si resulta que no practica el balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

33.- Una fábrica tiene tres cadenas de producción, A , B y C . La cadena A fabrica el 50 % del total de los coches producidos; la B , el 30 %, y la C el resto. La probabilidad de que un coche sea defectuoso es: en la cadena A , $1/2$; en la B , $1/4$, y en la C , $1/6$. Calcule razonadamente:

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A .

b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.

c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C ?

34.- Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35% cursa Economía; el 38% Derecho; el 27% restante estudia matemáticas. Si cada curso finaliza sus estudios de grado un 18% de los estudiantes de Economía, un 20% de los de Derecho y un 15% de los de Matemáticas, ¿qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios? (Sol.: $P[F] = 0,1797$, es decir un 17,97%)

TEORÍA: Variable aleatoria. Variables aleatorias discretas y continuas.

TEORÍA: Función de probabilidad de variable aleatoria discreta. Función de distribución.

Ejercicios

35.- Se lanza dos monedas y contamos el número de caras. Calcula:

a) La función de probabilidad, y represéntala gráficamente

b) Los parámetros media y desviación típica

(Sol.: Espacio muestral $E = (C,C) (C,X) (X,C) (X,X)$)

Variable aleatoria discreta : $X = \text{nº de caras}$ $X = 0, 1, 2$

Función de probabilidad: $f(0) = P[X = 0] = 1/4$; $f(1) = P[X = 1] = 1/2$; $f(2) = P[X = 2] = 1/4$

$X = \text{nº de caras}$	0	1	2
$P[X = x_i]$	1/4	1/2	1/4

b) $\mu = E[X] = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2} = 0,7071$$

36.- Se lanza una moneda 3 veces y contamos el número de caras.

a) Calcula la función de probabilidad y representa gráficamente.

b) Calcula la esperanza matemática y desviación típica

(Sol.: a) Variable aleatoria $X = n^{\circ}$ de caras $X = 0, 1, 2, 3,$

$E = (C,C,C) (C,C,X) (C,X,C) (X,C,C) (C,X,X) (X,C,X) (X,X,C), (X,X,X)$

Función de probabilidad

$f(0) = P[X = 0] = 1/8$ $f(1) = P[X = 1] = 3 (1/8) = 3/8$ $f(2) = P[X = 2] = 3 (1/8) = 3/8$ $f(3) = P[X = 3] = 1/8$

$X = n^{\circ}$ de caras	0	1	2	3
$P[X = x_i]$	1/8	3/8	3/8	1/8

b) $\mu = E[X] = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 12/8 = 1,5$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1,5^2} = 0,866$$

TEORÍA: Modelos probabilísticos discretos: Bernoulli. Binomial.

Ejercicios

37.- Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar 4 veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial. (Sol.: $B(4, 1/6)$)

38.- Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolvemos la bola al recipiente. (Sol.: $B(3, 2/5)$)

39.- Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de discos buenos fabricados por una máquina que produce un 90 % de discos sin error, al escoger 10 de ellos. (Sol.: $B(10, 0,9)$)

40.- Compruen si la variable aleatoria que cuenta el número de ases que podemos obtener, al extraer tres cartas una a una sin devolver a la baraja de 40 cartas. (No sigue una distribución binomial)

41.- Si se lanza un dado 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 cincos?

(Sol.: $A =$ "obtener un cinco" (éxito) y $\bar{A} =$ "no obtener cinco" (fracaso) , $X =$ "nº de cinco" sigue una distribución $B(10, 1/6)$)

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,155$$

42.- Si lanzamos 8 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 caras? ¿y la probabilidad de obtener al menos 6 caras?

(Sol.: $P(X = 3 \text{ caras}) = 56/256$; $P(x = \text{al menos } 6 \text{ caras}) = P(X = 6) + P(x = 7) + P(X = 8)$)

43.- En un estudio de venta por catálogo indica que 12 de cada 50 personas que reciben publicidad por correo acaban adquiriendo algunos productos. Se escogen al azar a 10 individuos y se considera la variable que expresa cuántos de ellos han comprado por catálogo.

a) Determina la distribución que sigue la variable.

- b) Halla la función de probabilidad
c) Calcula la media y la desviación típica de la variable X
d) Determinar la probabilidad de que dos de los individuos de la muestra compren por catálogo.
e) Halla la probabilidad de que ninguno de ellos realice compras por catálogo
f) ¿Cuántas personas de la muestra se espera que compren por catálogo?

(Sol.: a) $X = \text{“nº de los que compran por catálogo”}$ $B(10; 0,24)$; b) $P(X = t) = \binom{10}{t} \cdot (0,24)^t \cdot (0,76)^{10-t}$;
c) $\mu = 2,4$; $\sigma = 1,35$; d) $P(X = 2) = 0,2885$; e) $P(X = 0) = 0,06429$; f) $\mu = 2,4$, como se observa, de esta muestra de diez personas, se espera que un total de dos o tres recurran a este tipo de compra)

44.- Se realiza un examen tipo test que consta de 9 preguntas, cada una de las cuales ofrece 4 posibles respuestas. Si se contestan las 9 preguntas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener 5 aciertos?

Sol.: Éxito “pregunta acertada” y fracaso “pregunta fallada”.

$$P(\text{éxito}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Las pruebas son independientes unas de las otras, se trata de una variable discreta que sigue una distribución binomial $B(9; 0,25)$

Buscamos en el cuadro $n = 9$ y la columna de probabilidad 0,25, en esta columna se selecciona el número de éxitos $r = 5$, por tanto $P[X = 5 \text{ éxitos}] = 0,0389$

45.- En una distribución binomial $B(9; 0,8)$ halla la probabilidad de obtener 7 éxitos.

(Sol.: como $p = 0,8$, no está en la tabla, en lugar de buscar 7 éxitos buscaremos los 2 fracasos, $q = 1 - 0,8 = 0,2$, y sí está en la tabla, $B(9; 0,2)$ $P[X = 2] = 0,3020$)

46.- Se lanza una moneda al aire 9 veces. Determina la probabilidad de obtener un mayor número de caras que de cruces.

(Sol.: $X = \text{“obtener cara”}$, $n = 9$ y $p = 0,5$, se trata de una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial $B(9; 0,5)$ Pide que el número de éxitos sea mayor que 4.

$$P[X \geq 4 \text{ caras}] = P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] + P[X = 7] + P[X = 8] + P[X = 9] = 0,5001$$

47.- Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es: de chica 48,5 % y de chico 51,5 %. En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Calcula la probabilidad de que nazcan 7 chicas.

Solución: $X = \text{nazca chica “éxito”}$, binomial $B(10; 0,485)$ $p = 0,485$ $P[X = 7] = \binom{10}{7} (0,485)^7 (0,515)^3$

48.- Calcular la probabilidad de obtener 3 caras, si lanzamos 5 veces una moneda trucada que tiene el doble de probabilidad de mostrar cara que cruz

(Solución: $X = \text{nº de caras obtenidas}$, binomial $B(5, 2/3)$ $P[X = 3] = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,33$)

49.- El 3% de la población pertenece al grupo sanguíneo B⁻. ¿Qué probabilidad existe de que, al tomar 4 personas al azar, la mitad sea de ese grupo?

(Solución:

$$X = \text{n}^\circ \text{ de personas que sean del grupo B}^-, \text{ binomial } B(4; 0,003) \quad P[X = 2] = \binom{4}{2} (0,03)^2 \cdot (0,97)^2 = 0,0051)$$

50.- Supongamos que la probabilidad de nacer niño es 0,50. Calcula la probabilidad de que una familia de 6 hijos, sean:

- a) Todos varones b) Al menos, dos varones c) Tres varones d) Calcula la media y la desviación típica

(Sol.: Se trata de una distribución binomial $B(6; \frac{1}{2})$, de parámetros $n = 6$ y $p = \frac{1}{2}$

Sea X la variable= n° de hijos varones

a) $P(X = 6) = \binom{6}{6} (0,5)^6 (0,5)^0 = 0,015625$ (la probabilidad es del 1,56 %)

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (\binom{6}{0} (0,5)^0 (0,5)^6 + \binom{6}{1} (0,5)^1 (0,5)^5) = 1 - 0,109375 = 0,890625$

c) $P(X = 3) = 0,3125$

d) $\mu = n \cdot p = 6 \cdot 1/2 = 3$ varones $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 1,225$

51.- En una fábrica de relojes el control de calidad detecta la aparición de un defecto con una probabilidad de 0,1, pero que un reloj sea defectuoso es independiente del hecho de que los otros lo sean o no. Si retiramos 5 relojes al azar, determina la probabilidad de que :

- a) Al menos uno de los relojes sea defectuoso.
b) Exactamente dos relojes sean defectuosos.

(Sol.: $X = \text{n}^\circ$ de relojes defectuosos , $B(5; 0,1)$;

a) $P[X \geq 1] = 1 - (P[X = 0]) = 1 - \binom{5}{0} (0,1)^0 (0,9)^5$ b) $P[X = 2] = \binom{5}{2} (0,1)^2 (0,9)^3$

52.- La probabilidad de que un cazador novato cobre una pieza es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que cobre una pieza al menos 3 veces.

(Sol.: Sea $X = \text{n}^\circ$ de piezas cobradas por un cazador, $p = 0,4$ $q = 0,6$ $B(5; 0,4)$ $P[X \geq 3] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0,4096$)

53.- Un mensaje es transmitido con errores con probabilidad 0,1. Emitimos de forma independiente 10 mensajes. Calcula la probabilidad de que al menos alguno de los 10 mensajes haya sido transmitido con errores.

(Sol.: Sea $X = \text{n}^\circ$ de mensajes transmitidos con error. $B(10; 0,1)$, $P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[X = 0] = 0,6125$)

54.- Si el 20 % de las piezas producidas por una maquina son defectuosas, ¿cual es la probabilidad de que, entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas?

(Sol.: X = número de piezas defectuosas; $p = 0,2$; $B(4;0,2)$; $P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0,9728$)

55.- De una urna con 4 bolas blancas y 3 negras se extraen sucesivamente 3 bolas, que se vuelven a introducir en ella después de cada extracción. Dada la variable aleatoria n° de bolas blancas extraídas, hallar la media y la desviación típica.

(Sol.: X = n° de bolas blancas, binomial $B(3, 4/7)$; $E(x) = \mu = n \cdot p = 3 \cdot 4/7 = 1,71$;
 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3 \cdot 4/7 \cdot 3/7} = 0,86$)

56.- La probabilidad de que un avión llegue con retraso a cierto aeropuerto es de 0,012. ¿Qué pronedio de aviones llegará tarde al aeropuerto si en él aterrizan diariamente 1250 aviones? Halla la desviación típica del número de aviones que llegarán tarde. (Sol.: $E(x) = \mu = 15$; $\sigma = 3,85$)

57.- En una bolsa en la que hay numerosas bolas de distintos colores, el 25% son rojas. ¿Qué probabilidad hay de que al extraer una bola esta sea roja?. Si se extraen sucesivamente 4 bolas, devolviéndolas a la bolsa después de cada extracción, y se define la variable aleatoria X = n° de bolas rojas obtenidas, calcula $E(x) = \mu$ y σ . (Sol.: $P[\text{roja}] = 0,25$; $E(x) = \mu = 1$; $\sigma = 0,87$, $P[X = 2] = 0,2109$)

58. PAU Un tratamiento contra el cancer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide:

- i) Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.
- ii) Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría.
- iii) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

X = « n° enfermos que experimentan mejoría», X variable binomial $B(5;0,8)$

n = « n° pacientes a los que se les suministra el tratamiento».

P = «probabilidad de mejoría». Si $p = 0,8 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$

i) $P(X = 5) = \binom{5}{5} (0,8)^5 \cdot (0,2)^0 = 0,3277$

ii) $P(\text{al menos tres no mejoren}) = P(1 \text{ o } 2 \text{ mejoren}) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
 $= \binom{5}{0} (0,8)^5 \cdot (0,2)^0 + \binom{5}{1} (0,8)^4 \cdot (0,2)^1 + \binom{5}{2} (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = \mathbf{0,0579}$

iii) $E[X] = \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ pacientes}$

59.- PAU Un alumno hace un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente a dos o mas preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si responde al azar a cada una de las preguntas.

(Sol.: $X = \text{n.º de preguntas contestadas correctamente}$. $p = \text{probabilidad de contestar correctamente}$ $p = 1/3$
 $q = 1 - 1/3 = 2/3$ $n = \text{n.º de preguntas del examen} = 4$. X variable $B(4, 1/3)$

$$P(\text{aprobar}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(P(X = 0) + P(X = 1)) = 0,4 \quad P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16/81$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 32/81$$

60.- PAU Si el 20 % de las tartas elaboradas en una fabrica tienen trazas de nueces, ¿cuál es la probabilidad de que, entre 4 tartas elegidas al azar, a lo sumo 2 contengan trazas de nueces?

(Sol.: $X = \text{número de tartas con trazas de nueces}$

$p = \text{probabilidad de tarta con trazas de nueces} = 0,2$

$n = \text{número de tartas elegidas} = 4$

X variable $B(4; 0,2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{4}{0} (0,2)^0 (0,8)^4 + \binom{4}{1} (0,2)^1 (0,8)^3 + \binom{4}{2} (0,2)^2 (0,8)^2 = 0,9728$$

61.- En un laboratorio de análisis clinicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resulta negativo. Si han recibido 10 muestras para analizar:

a) Determina la probabilidad de que haya 2 personas a las que la prueba les dé positivo

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de 1 persona? (Sol.: $X \sim B(10, 0,02)$;

$$\text{a) } P[X = 2] = \binom{10}{2} (0,02)^2 (0,98)^8 = 0,01531; \text{ b) } P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1]) = 0,0162$$

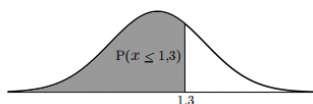
TEORÍA: Función de probabilidad o densidad de variable aleatoria continua. Función de distribución.

TEORÍA: Distribuciones de probabilidad continua: Normal

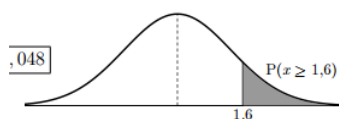
Ejercicios

62.- Ejemplo: Si X es una variable $N(0,1)$. Calcular:

a) $P[X \leq 1,3] = 0,9032$



b) $P[X \geq 1,6] = 1 - P[X \leq 1,6] = 1 - 0,9452 = 0,048$

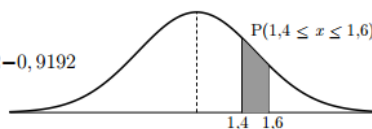


c) $P[1,4 \leq X \leq 1,6] = P[X \leq 1,6] - P[X \leq 1,4] = 0,9452 - 0,9192 = 0,026$

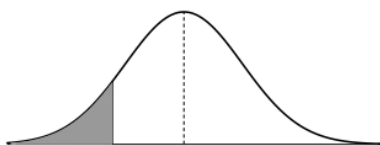
Tomemos $a = 1,4$ y $b = 1,6$:

$$P(1,4 \leq X \leq 1,6) = \phi(1,6) - \phi(1,4) = 0,9452 - 0,9192$$

$$= 0,026$$



d) $P[X \leq -1,3] = 1 - P[X \leq 1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$



e) $P[-1,3 \leq X \leq 1,6] = P[X \leq 1,6] - P[X \leq -1,3] = P[X \leq 1,6] - (1 - P[X \leq 1,3]) = 0,9452 - (1 - 0,9032) = 0,9452 - 0,0968 = 0,8484$

f) $P[Z \geq -1,73] = P[Z \leq 1,73] = 0,9582$

g) $P[-1,77 \leq Z \leq -0,65] = P(0,65 \leq Z \leq 1,77) = P[Z \leq 1,77] - P[Z \leq 0,65] = 0,9616 - 0,7422 = 0,2194$

63.- Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular las probabilidades.

a) $P[Z \leq 1]$ b) $P[Z \leq 2,46]$ c) $P[Z \geq 1]$ d) $P[Z \leq -1]$ e) $P[0,5 < Z < 1,5]$ f) $P[-1,27 \leq Z \leq 1,66]$

(Sol.: a) 0,8413; b) 0,9931; c) 0,1587; d) 0,1587; e) 0,2417; f) 0,8495)

64.- En la distribución normal $N(0, 1)$, calcula el valor de k en los siguientes casos:

a) $P[Z \leq k] = 0,7673$ b) $P[Z \leq k] = 0,9761$ c) $P[Z \geq k] = 0,1075$ d) $P[Z \geq k] = 0,0045$

(Sol.: a) $k = 0,73$; b) $k = 1,98$; c) $k = 1,24$; d) $k = 2,61$)

Tipificación de la variable

65- Ciertos estudios demuestran que el consumo de gasolina de los coches es una variable normal con media 7 litros a los 100 kilómetros y una desviación típica 1. ¿Qué porcentaje de coches consumen entre 6 y 8 litros cada 100 kilómetros? Calcula el consumo C si se sabe que el 30% de los coches tienen un consumo superior a C.

(Sol.: X = consumo de gasolina es $N(7, 1)$, tipificamos a Z normal $N(0,1)$ y hallamos la probabilidad pedida:

$$P(6 \leq Z \leq 8) = P\left(\frac{6-7}{1} \leq Z \leq \frac{8-7}{1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2 P(Z \leq 1) - 1 = 0,6826$$

Hay un 68,26 % de coches que consumen entre 6 y 8 litros.

$P(X > C) = 0,3$; tipificando a Z normal $N(0,1)$:

$$P(X > C) = P\left(Z > \frac{C-7}{1}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{C-7}{1}\right) = 0,3; P(Z < C - 7) = 0,7; C - 7 = 0,52; C = 7,52 \text{ litros de consumo por 100 kilómetros}$$

66.- PAU Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media de los televisores sigue una distribución normal:

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que un televisor dure entre 9 y 11 años.

(Sol.: a) X = Duración media de los televisores $X \sim N(10;0,7)$

$$P(X > 9) = 1 - P(X < 9) = \text{Tipificar} = 1 - P\left(Z < \frac{9-10}{0,7}\right) = 1 - P(Z < -1,42) = 1 - (1 - P(Z < 1,42)) = 0,9222$$

$$b) P(9 < X < 11) = \text{Tipificar} = P\left(\frac{9-10}{0,7} < Z < \frac{11-10}{0,7}\right) = P(-1,42 < Z < 1,42) = P(Z < 1,42) - (1 - P(z < 1,42)) = 0,8444$$

67.- PAU Una persona que desea encontrar trabajo se presenta a dos entrevistas en las empresas A y B. En la entrevista de la empresa A obtiene una puntuación de 9, con una media de puntuación de 7 para la totalidad de los candidatos y una varianza de 4. En la entrevista de la empresa B obtiene una puntuación de 8, con una media de puntuación de 6 para la totalidad de los candidatos y una desviación típica de 1,5. ¿En qué entrevista ha obtenido esa persona una mejor puntuación relativa?

(Solución: Por los datos del problema, se supone que la variable «puntuación de los candidatos» se distribuye normalmente en ambas empresas.

X variable $N(7, 4) = N(7,2)$; Y variable $N(6;1,5)$

Para contestar en qué caso ha obtenido mejor puntuación, vemos en qué caso hay mayor probabilidad debajo del valor correspondiente.

$$P(X < 9) = \text{Tipificar} = P\left(Z < \frac{9-7}{2}\right) = P(Z < 1) = 0,8413$$

$$P(Y < 8) = \text{Tipificar} = P\left(Z < \frac{8-6}{1,5}\right) = P(Z < 1,33) = 0,9082$$

En la empresa A, está situado sobre un 84,13% de los candidatos. En la empresa B, está situado sobre un 90,82 % de los candidatos. Luego está mejor situado en la empresa B.)

68.- PAU En un examen, al que se presentaron 2 000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media 72 y desviación típica 9. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una puntuación entre 60 y 80?

(Sol.: X variable normal $N(72; 9)$ $P(60 < X < 80) = \text{Tipificar} = P\left(\frac{60-72}{9} < Z < \frac{80-72}{9}\right) = 0,8106 - 1 + 0,9082 = 0,7188$

La probabilidad de que un estudiante obtenga entre 60 y 80 puntos es 0,7188. Esto quiere decir que, entre los 2 000 estudiantes: $2000 \cdot 0,7188 = 1437,6 \approx 1438$ estudiantes obtienen una puntuación entre 60 y 80.

69.- PAU Cierta batería dura un promedio de tres años, con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo que la duración de las baterías es una variable normal. ¿Que porcentajes de las baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?

(Sol.: X = duración de cierto tipo de batería. $N(3; 0,5)$ $P[2 < X < 4] = \text{Tipificamos} = P\left[\frac{2-3}{0,5} < Z < \frac{4-3}{0,5}\right] =$

$= P[-2 < Z < 2] = P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

El 95% de las baterías duran entre 2 y 4 años.)

Ejercicios de EVAU

Junio 2024/25

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

- a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.
- a.2) **[1 punto]** Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2 .

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?
- b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Julio 2024/25

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

- a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?
- a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

- b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.
- b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.
- b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

n	k	p									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

Junio 2023/24

6.

- a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.
- b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:
 - b.1) **[0,75 puntos]** $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .
 - b.2) **[0,75 puntos]** $P(A | B)$ y $P(B | A)$.

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Julio 2023/24

6.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) **[0,75 puntos]** Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	p								
		0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

Junio 2022/23

4. a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

7.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Modelo propuesto Curso 2022/23

5. a) En el servicio de urgencias de un hospital clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k	p								
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

7.

b) Tiramos un dado de 4 caras dos veces y sea X la variable aleatoria que representa el producto de los dos valores obtenidos.

b.1 **[0,75 puntos]** Calcula $P(X = 1)$ y $P(X = 4)$.

b.2 **[0,75 puntos]** Si $X = 4$, calcula la probabilidad de que en la primera tirada haya salido un 1.

7.

b) **[1,5 puntos]** En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b.1) **[0,75 puntos]** La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b.2) **[0,5 puntos]** El número de opositores del total de 450 que obtuvo menos de 75 puntos.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

8. a) En una urna hay tres bolas rojas y dos azules. Se extrae una bola y luego otra (sin devolver antes la primera a la urna).

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color?

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que las dos bolas han salido del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean azules?

b) Un panadero hace panecillos con un peso que se distribuye como una normal de media 200 g y desviación típica 15 g.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de panecillos pesa más de 203 g?

b.2) **[0,75 puntos]** Calcula el peso por encima del cual está el 67 % de los panecillos más pesados.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Junio 2021/22

7. b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.1) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?
- a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?
- b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Julio 2021/22

7. b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k	p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0		0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1		0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2		0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3		0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4		0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

8. a) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?
- b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Junio 2020/21

8. a) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
- b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k	P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0		0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1		0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2		0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3		0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4		0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Julio 2020/21

8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
- b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k	P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0		0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1		0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2		0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3		0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4		0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5		0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6		0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7		0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8		0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Junio 2019/20

8. a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?
- b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k	P	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0		0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1		0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2		0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3		0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4		0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5		0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6		0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020	0.0020

Julio 2019/20

8. a) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?
- b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Junio 2018/19

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

- a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

- b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**
b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2018/19

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

- a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**
a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

- b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**
b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Julio 2018/19

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A)=0,75$ y $P(B)=0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A | B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A | B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Julio 2018/19

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2017/18

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina

A. (0,5 puntos)

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2017/18

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2017/18

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10 % y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4 % y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

b) Una parte de un examen consta de cinco preguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Otros propuestos:

Madrid 2023 – Opción A

Problema 23.1.4 (2,5 puntos) Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

- (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.
- (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.
- (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Madrid 2023 – Opción B

Problema 23.2.4 (2,5 puntos) Sabiendo que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\bar{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(\bar{B}) = \frac{7}{20}$, se pide:

- (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
- (0,5 puntos) Calcular razonadamente $P(A - B)$
- (0,5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

Madrid 2022 Extraordinario – Opción A

Problema 22.9.4 (2,5 puntos) El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

- (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.
- (0,5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.
- (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.
- (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Madrid 2022 Ordinaria – Opción A

Problema 22.3.4 (2,5 puntos) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %.

Se reunieron 10 de estos consejeros.

- (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
- (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
- (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Madrid 2022 Ordinaria – Opción B

Problema 22.4.4 (2,5 puntos) De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
- (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Madrid Modelo 2022 – Opción B

Problema 22.2.4 (2,5 puntos) Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

- a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.
- b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.
- c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.
- d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A .

Madrid Modelo 2021 – Opción B

Problema 21.2.4 (2,5 puntos) Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

- a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.
- b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.
- c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.
- d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Castilla La Mancha

Septiembre 2017/18

5B. a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2016/17

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

(0,5 puntos)

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2016/17

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2016/17

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

